Análisis variacional de las ecuaciones de FitzHugh-Nagumo en electrofisiología cardíaca

por

Nicole Andrea Cornejo Fuenzalida

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile
para optar al grado de

Magister en Matemática

Profesor guía:
Duvan Henao Manrique - Pontificia Universidad Católica de Chile

Comisión informante:
Marta García-Huidobro - Pontificia Universidad Católica de Chile
Daniel Hurtado - Pontificia Universidad Católica de Chile

Septiembre 2015
Santiago, Chile

Dedicada a mi familia, en especial a
Roxana, mi amada madre y
Eduardo, mi amado esposo.

Agradecimientos

Llegar a los resultados presentado en este trabajo no fue fácil, no habría sido posible sin las maravillosas personas que me acompañaron en este camino.

En primer lugar, quiero agradecer a Dios por los dones que me dio, que hoy dan frutos y se reflejan en esta tesis.

Además, quiero agradecer infinitamente a mi profesor guía Duvan Henao, por su paciencia, dedicación, compromiso y principalmente su cariñosa forma de enseñar, sin duda su apoyo fue fundamental para obtener los resultados expuestos. Este proceso junto a él ha sido una experiencia muy gratificante y enriquecedora, la cual nunca olvidaré. De igual manera quiero agradecer a los profesores Marta García-Huidobro y Daniel Hurtado quienes con generosidad han dedicado parte de su tiempo en revisar este trabajo. A los profesores de la Facultad de Matemáticas, de los cuales me quedan conocimientos y recuerdos valiosos, les agradezco la formación que me han entregado, la que me ha permitido lograr estos frutos. Principalmente quiero agradecer a quienes me recibieron en mi primer día de universidad, los profesores Renato Lewin y Lorena Correa, a quienes les agradezco el apoyo personal, académico y profesional, ellos supieron guiar e incentivar el que haya llegado hasta este momento, cosa que siendo novata veía muy lejana.

Agradezco también a mis compañeros y amigos, increíbles personas que conocí en mi vida universitaria, en especial a quienes me acompañaron en estas últimas etapas de mi vida; a la M25, por el compañerismo que logramos en estos últimos años juntos, en especial quiero mencionar a mi compañera y amiga de alegrías y frustraciones Fernanda Torres y el apoyo cariñoso de Sebastián Torres. Asimismo quiero agradecer a mis compañeras y amigas de trabajo, desconectarse por un momento de la vida académica fortaleció en mi otras habilidades que desconocía, principalmente a Yael Goic por su generosidad y apoyo.

De todo corazón, quisiera agradecer y dedicar estas tesis a mi amada familia, gracias a su esfuerzo y a su apoyo incondicional he llegado hasta acá, en especial

a mi mamita quién desde niña inculcó en mi valores que hoy me hacen una gran persona. A mi esposo, mi Eduardo, quien comenzó conmigo esta aventura que en un principio se veía tan distante, los días de frustraciones de quien estudia matemática no son pocos, gracias por la paciencia, el amor y por siempre creer en mi. De igual manera quiero agradecer a su familia, quienes me acogieron en mis primeros años de estudios.

Índice general

Capítulo 1

Introducción

Esta tesis estudia la semidiscretización temporal de las ecuaciones de FitzHugh-Nagumo en electrofisiología cardíaca:

$$\begin{aligned}
A_m(C_m\dot{\phi^m}(x,t) + h(\phi^m(x,t)) + \theta r(x,t)) &= \operatorname{div}(D_i\nabla\phi^i(x,t)) + I_i^s(x,t),\\
A_m(C_m\dot{\phi^m}(x,t) + h(\phi^m(x,t)) + \theta r(x,t)) &= -\operatorname{div}(D_e\nabla\phi^e(x,t)) - I_e^s(x,t),\\
C_r\dot{r}(x,t) &= \eta\phi^m(x,t) - \gamma r(x,t),
\end{aligned}$$

con condiciones de borde,

$$\begin{aligned}
-D_i\nabla(\phi^m(x,t) + \phi^e(x,t))\cdot n = 0, &\quad x\in\partial\mathcal{B},\\
\phi^e(x,t) = \bar{\phi}^e(x,t), &\quad x\in\partial\mathcal{B}_\Phi,\\
-D_e\nabla\phi^e(x,t)\cdot n = \bar{q}^e, &\quad x\in\partial\mathcal{B}_q,
\end{aligned}$$

y condiciones iniciales dadas por,

$$\begin{aligned}
\phi^m(x,t)|_{t=0} &= \phi_0^m(x),\\
\phi^e(x,t)|_{t=0} &= \phi_0^e(x),\\
r(x,t)|_{t=0} &= r_0(x).
\end{aligned}$$

En estas ecuaciones $\phi^i(x,t), \phi^e(x,t)$ y $\phi^m(x,t)$ representan una versión homogeneizada del voltaje intracelular, extracelular y transmembranal en los cardiomiocitos presentes alrededor de x en el instante $t\in[0,T]$, donde x es un punto material del corazón, representado por la región $\mathcal{B}\subset\mathbb{R}^3$. La variable r es una variable interna que representa el estado de apertura y cierre de ciertos canales iónicos. El resto de las variables y funciones involucradas son definidas en los *Capítulos 4 y 5*. Una descripción más detallada del modelo (el cual puede verse como una versión simplificada del modelo de Hodgkin-Huxley, ganador del premio Nobel de Medicina y Fisiología en 1963) y del proceso de homogeneización asociado, pueden encontrarse, p.ej. en [9, 5, 15].

En [12], los autores estudian la semidiscretización temporal

$$\begin{aligned} C_\phi \frac{\phi_{n+1}-\phi_n}{\tau} - \operatorname{div}(D\nabla\phi_{n+1}) &= f^\phi(\phi_{n+1}, r_{n+1}), \\ C_r \frac{r_{n+1}-r_n}{\tau} &= f^r(\phi_{n+1}, r_{n+1}), \end{aligned}$$

de las ecuaciones electrofisiológicas para el modelo de monodominio, el cual se obtiene al suponer que D_i es múltiplo de D_e o bien que D_e es altamente conductor; $\phi = \phi^m$, mostrando que la actualización incremental de (ϕ_n, r_n) a (ϕ_{n+1}, r_{n+1}) corresponde al siguiente problema de optimización

$$\min_{\phi\in\mathcal{S}} \max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\phi, r].$$

Demuestran que tiene solución única, siempre y cuando

$$\frac{1}{\tau} > \max\left\{\frac{\delta_\phi}{C_\phi} - \frac{\mu}{C_\phi C_\mathcal{B}}, \frac{\delta_r}{C_r^{min}}\right\}. \tag{1.1}$$

Más aún, demuestran que el problema se reduce a la minimización de un funcional efectivo

$$F_n[\phi] := \int_\mathcal{B} \max_{r\in\mathbb{R}^M} g_n(\phi(x), \nabla\phi(x), r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}(x)\cdot\phi(x)\, dS,$$

que sólo depende, en forma convexa, del voltaje ϕ (reduciendo así el numero de incógnitas en las ecuaciones). Este resultado es importante porque en electrofisiología cardíaca, y en ámbitos relacionados como la mecánica computacional, es común ver que métodos numéricos bien intencionados terminan en ciclos de cómputo infinitos, sin encontrar nunca una solución a las ecuaciones. En cambio, la discretización espacial en elementos finitos de un funcional convexo, como lo es F_n, reduce la simulación numérica del impulso eléctrico a la resolución de una serie de sistemas finitos de ecuaciones algebraicas para el cual se puede garantizar la convergencia del método de Newton-Raphson en muy pocos pasos (ver, p.ej, [3]; en las simulaciones de estos autores se alcanzaban resultados con precisión numérica en menos de cinco pasos). Cabe destacar el carácter explícito de la cota (1.1) para el paso de tiempo obtenida por estos autores: si el resultado hubiera sido sólo del tipo “existe τ_0 tal que F_n es convexo para $\tau < \tau_0$”, la determinación de dicho paso en la implementación del código numérico habría seguido haciéndose a prueba y error, con riesgo de que el método no converja por elegir un τ demasiado grande. Señalamos finalmente que dicha cota en τ se logra gracias a una compresión profunda de la estructura variacional subyacente a las ecuaciones diferenciales consideradas.

En esta tesis: 1. Se explican los prerequisitos matemáticos (del análisis funcional convexo y del cálculo de variaciones) utilizados en el mencionado artículo, haciendo posible la lectura para alguien que no este familiarizado con las difíciles técnica involucradas. 2. Se extiende el análisis de [12], en el cual se considera la simplificación de monodominio donde se asume que los tensores de conductividad intracelular D_i y extracelular D_e son tales que $D_i = kD_e$ para algún $k \in (0, \infty)$ o bien $D_e \to \infty$, al problema general de bidominio en donde los tensores de conductividad antes mencionados son independientes. 3. Se demuestra la convergencia de las soluciones al problema semidiscreto en el tiempo (6.19) a una solución débil del problema original (6.3)-(6.11) en tiempo continuo a medida que el paso de tiempo $\tau \to 0$, entregando la siguiente estimación de la tasa de convergencia

$$\max_{t\in(0,T)} \left(A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m(t) - \phi^m_\tau(t))^2 + C_r(r(t) - r_\tau(t))^2 \, dx \right) +$$
$$\int_0^T \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\phi^i(t) - \phi^i_\tau(t)) \cdot \nabla(\phi^i(t) - \phi^i_\tau(t)) + D_e \nabla(\phi^e(t) - \phi^e_\tau(t)) \cdot \nabla(\phi^e(t) - \phi^e_\tau(t)) \, dx \, dt$$
$$+ \int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \gamma(r(t) - r_\tau(t)) \cdot (r(t) - r_\tau(t)) \, dx \, dt < C\tau\varepsilon_0,$$

donde ε_0 representa el integrando del lado izquierdo evaluado en $t = 0$. Este análisis de convergencia está basado en [15]. La versión que aquí se presenta es un poco más general por cuanto considera la presencia de estímulos internos y externos y no se restringe al caso de un medio aislado sino que considera una condición de flujo eléctrico de tipo Neumann no homogéneo en una parte de la frontera del dominio.

Esperamos que esta tesis sea de utilidad para alumnos e investigadores, matemáticos e ingenieros matemáticos, que estén introduciéndose en este fascinante tema.

Capítulo 2

Preliminares

Antes de comenzar nuestro estudio recordamos algunas definiciones y resultados del análisis funcional. Sin embargo no es el propósito de este trabajo analizar en detalle sus demostraciones, para seguir éstas en detalle ver p.ej. [4].

Definición 2.1 (*Espacio $\mathcal{L}^p$*)**.** Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$. Sea $1 \leq p < \infty$; definimos el espacio

$$\mathcal{L}^p(\Omega) = \left\{ \phi : \Omega \to \mathbb{R} : \phi \text{ medibles y } \int_\Omega |\phi|^p \; dV < \infty \right\}.$$

No explicaremos en qué consiste que una función sea medible, pero es un requisito para que la integral esté bien definida (ver, p.ej. [4, IV]).

Definición 2.2 (*Espacio de Sobolev*)**.** Definimos el *espacio de Sobolev*

$$\mathcal{H}^1(\Omega) = \Bigg\{ \phi \in \mathcal{L}^2(\Omega) : \forall \alpha \in \{1, \ldots, N\} \; \exists \; \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \in \mathcal{L}^2(\Omega) \text{ tal que}$$
$$\int_\Omega \phi \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha} \, dV = -\int_\Omega \frac{\partial \phi}{\partial x_\alpha} \varphi \, dV \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) \Bigg\}. \qquad (2.1)$$

donde $\dfrac{\partial (\cdot)}{\partial x_\alpha}$ denota la derivada de $(\cdot)(x_1, \ldots, x_N)$ con respecto a x_α.

La anterior definición de derivada está relacionada con la definición clásica; es una generalización del mismo concepto que resulta más apropiada para el análisis de ecuaciones diferenciales [4, VIII]. El lector no interesado en el análisis funcional puede simplemente pensar en $\mathcal{H}^1(\Omega)$ como el conjunto de las funciones cuyas derivadas son de cuadrado integrables.

De estos espacios nos interesa en particular la siguiente propiedad:

Proposición 2.3. *Sea $1 < p < \infty$. Toda sucesión acotada $\{\phi_n\}$ en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ tiene una subsucesión $\{\phi_{n_k}\}$ que converge débilmente a algún $\phi \in \mathcal{L}^p(\Omega)$ cuando $k \to \infty$. Análogamente, si $\{\phi_n\}$ es acotada en $\mathcal{H}^1(\Omega)$ entonces tiene una subsucesión $\{\phi_{n_k}\}$ que converge débilmente a algún $\phi \in \mathcal{H}^1(\Omega)$ cuando $k \to \infty$.*

Para que el enunciado anterior sea comprensible debemos explicar qué significa que una sucesión sea acotada y que converja débilmente. Definimos

$$\|\phi\|_{\mathcal{L}^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega \phi^p \, dV\right)^{\frac{1}{p}}, \quad \phi \in \mathcal{L}^p(\Omega) \tag{2.2}$$

$$\|\phi\|_{\mathcal{H}^1(\Omega)} = \left(\int_\Omega \phi^2 \, dV + \int_\Omega |\nabla\phi|^2 \, dV\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \phi \in \mathcal{H}^1. \tag{2.3}$$

Diremos que ϕ_n es acotada en $\mathcal{W}$, donde $\mathcal{W}$ es $\mathcal{L}^p(\Omega)$ o $\mathcal{H}^1(\Omega)$, si:

$$\sup_n \|\phi_n\|_{\mathcal{W}} < \infty.$$

Diremos que $\phi_n \rightharpoonup \phi$ (ϕ_n converge débilmente a ϕ) en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ si:

$$\int_\Omega \phi_n \varphi \, dV \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega \phi\varphi \, dV \quad \forall\varphi \in \mathcal{L}^q(\Omega), \; q = \frac{p}{p-1} \tag{2.4}$$

y que $\phi_n \rightharpoonup \phi$ en $\mathcal{H}^1(\Omega)$ si:

$$\int_\Omega \nabla\phi_n \cdot \nabla\varphi \, dV \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_\Omega \nabla\phi \cdot \nabla\varphi \, dV \quad \forall\varphi \in \mathcal{H}^1(\Omega). \tag{2.5}$$

En este artículo sólo estudiaremos funciones en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ y en $\mathcal{H}^1(\Omega)$. Sin embargo para el análisis de modelos más complejos que el de FitzHugh-Nagumo podría ser necesario considerar otros espacios funcionales. Por esta razón desarrollaremos nuestra teoría en forma abstracta, hablando de espacios de funciones generales a los que denotaremos por $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$, y sólo al final aplicaremos nuestros resultados al modelo particular que tenemos en mente.

Definición 2.4 (*Espacio de Banach*)**.** Diremos que un espacio vectorial $\mathcal{W}$ es un *espacio de Banach* si a cada $\phi \in \mathcal{W}$ podemos asociar un número $\|\phi\|_{\mathcal{W}} \geq 0$, conocido como la norma de ϕ, tal que

(i) $\|\phi\|_{\mathcal{W}} = 0$ si y sólo si $\phi = 0$.

(ii) $\|\lambda\phi\|_{\mathcal{W}} = |\lambda| \, \|\phi\|_{\mathcal{W}} \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \; \forall\phi \in \mathcal{W}$.

(iii) $\|\phi_1 + \phi_2\|_{\mathcal{W}} \leq \|\phi_1\|_{\mathcal{W}} + \|\phi_2\|_{\mathcal{W}} \quad \forall\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{W}$.

(iv) Si una sucesión $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{W}$ es tal que

$$\forall\varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \; n, m \geq N \Rightarrow \|\phi_n - \phi_m\|_{\mathcal{W}} \leq \varepsilon$$

entonces existe algún $\phi \in \mathcal{W}$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\|_{\mathcal{W}} = 0.$$

Definición 2.5 (*Dualidad*)**.** Sea $\mathcal{W}$ un espacio de Banach. Decimos que una función $\Lambda : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ es un *funcional lineal continuo* si:

(i) $\Lambda(\phi_1 + \phi_2) = \Lambda(\phi_1) + \Lambda(\phi_2) \;\; \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{W}$.

(ii) $\Lambda(\lambda\phi) = \lambda\Lambda(\phi) \;\; \forall \lambda \in \mathbb{R}, \; \forall \phi \in \mathcal{W}$.

(iii) Si $\{\phi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de funciones en $\mathcal{W}$ tal que

$$\|\phi_n - \phi\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ entonces } \Lambda(\phi_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda\phi.$$

Definimos $\mathcal{W}^*$, el *espacio dual* de $\mathcal{W}$, como el espacio de todos los funcionales lineales continuos $\Lambda : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$. La norma en $\mathcal{W}^*$ está definida por:

$$\|\Lambda\|_{\mathcal{W}^*} = \sup_{\substack{\|\phi\|_{\mathcal{W}} \leq 1 \\ \phi\in\mathcal{W}}} |\Lambda(\phi)| \,.$$

Dado $\Lambda \in \mathcal{W}^*$ y $\phi \in \mathcal{W}$ a menudo escribimos $\langle \Lambda, \phi \rangle$ en vez de $\Lambda(\phi)$. Si $\mathcal{W} = \mathcal{L}^p(\Omega)$, entonces $\mathcal{W}^* = \mathcal{L}^q(\Omega), \; q = \dfrac{p}{p-1}$; si $\mathcal{W} = \mathcal{H}^1(\Omega)$, entonces $\mathcal{W}^* = \mathcal{H}^1(\Omega)$ (ver [4, IV.3 y VIII.2] resp.).

Definición 2.6 (*Convergencia débil*)**.** Sea $\{\phi_n\}$ una sucesión en un espacio de Banach $\mathcal{W}$. Decimos que $\{\phi_n\}$ *converge débilmente a* ϕ ($\phi_n \rightharpoonup \phi$) si

$$\langle \Lambda, \phi_n \rangle \xrightarrow[n\to\infty]{} \langle \Lambda, \phi \rangle \quad \forall \Lambda \in \mathcal{W}^*.$$

En el caso de $\mathcal{L}^p(\Omega)$ y $\mathcal{H}^1(\Omega)$ esta definición resulta ser la dada anteriormente en (2.4) y (2.5).

Definición 2.7 (*Compacidad secuencial débil*)**.** Sea $\mathcal{W}$ un espacio de Banach. Decimos que $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ es *secuencialmente compacto en la topología débil* (a veces decimos *"secuencialmente débilmente compacto"*) si dada cualquier sucesión $\{\phi_n\} \subset \mathcal{A}$ existe $\phi \in \mathcal{A}$ y una subsucesión $\{\phi_{n_k}\}$ que converge débilmente a ϕ.

Definición 2.8 (*Reflexividad*)**.** Sea $\mathcal{W}$ un espacio de Banach. Decimos que una función $\Upsilon : \mathcal{W}^* \to \mathbb{R}$ es un funcional de $\mathcal{W}^{**}$ si existe $C > 0$ tal que

$$\Upsilon(\Lambda) \leq C \, \|\Lambda\|_{\mathcal{W}^*} \quad \forall \Lambda \in \mathcal{W}^*.$$

Decimos que $\mathcal{W}$ es *reflexivo* si a cada $\Upsilon \in \mathcal{W}^{**}$ se le puede asociar un $\phi \in \mathcal{W}$ tal que

$$\Upsilon(\Lambda) = \langle \Lambda, \Upsilon \rangle \quad \forall \Lambda \in \mathcal{W}^*.$$

Una discusión más profunda sobre el concepto de reflexividad se puede encontrar en [4, III.5]. Los espacios $\mathcal{L}^p(\Omega),\ 1 < p < \infty$ y $\mathcal{H}^1(\Omega)$ son reflexivos.

Definición 2.9. Sea $\mathcal{W}$ un espacio Banach. $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ se dice *acotado* si $\sup\limits_{\phi \in \mathcal{A}} \|\phi\|_{\mathcal{W}} < \infty$.

Proposición 2.10. *Todo subconjunto acotado $\mathcal{A}$ de un espacio de de Banach reflexivo $\mathcal{W}$ es débilmente secuencialmente compacto.*

En el caso $\mathcal{W} = \mathcal{L}^p(\Omega),\ \mathcal{H}^1(\Omega)$ ésta es la *Proposición* 2.3.

Por simplicidad en ocasiones diremos que un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ es compacto en la topología débil de $\mathcal{W}$ (o que es débilmente compacto) para expresar que es secuencialmente débilmente compacto. En estricto rigor cometemos un abuso de lenguaje puesto que las dos nociones no son necesariamente equivalentes (ver p. ej. [4]). Sin embargo no es una falta grave puesto que trabajaremos siempre con espacios reflexivos $\mathcal{W}$, en los cuales todo conjunto débilmente compacto es secuencialmente débilmente compacto (ver [4, Th.III.27]).

Definición 2.11. Sea $\mathcal{W}$ un espacio de Banach. Decimos que un funcional $G : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ es *semicontinuo inferiormente* en $\mathcal{W}$(s.c.i)(resp. *superiormente* (s.c.s)) si dada una sucesión $\{\phi_n\}$ que converge a ϕ,

$$G(\phi) \leq \liminf G(\phi_n) \quad (resp.\ G(\phi) \geq \limsup G(\phi_n)). \tag{2.6}$$

Decimos que es *semicontinuo inferiormente* (resp. *superiormente*) *con respecto a la topología débil de* $\mathcal{W}$ (es débilmente s.c.i (resp. es débilmente s.c.s)) si (2.6) se cumple para toda sucesión $\{\phi_n\}$ y todo $\phi \in \mathcal{W}$ tales que $\phi_n \rightharpoonup \phi$.

Proposición 2.12. *Sea $\mathcal{W}$ un espacio de Banach. Todo funcional convexo y semicontinuo inferiormente $G : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ es también semicontinuo inferiormente con respecto a la topología débil de $\mathcal{W}$. Análogamente si $G : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ es cóncavo y semicontinuo superiormente es también semicontinuo superiormente con respecto a la topología débil de $\mathcal{W}$.*

La *Proposición 2.12* es consecuencia del teorema de Mazur, su demostración se puede ver en [7, Cap. I, Corolario 2.2].

Definición 2.13 (*Conjunto convexo*)**.** Un conjunto $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ se dice *convexo* si para todo par de elementos $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{W}$ y todo $\lambda \in (0,1)$ se tiene que $\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2$ está contenido en $\mathcal{W}$.

Definición 2.14 (*Funcional convexo*)**.** Sea $\mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ convexo y $G : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$. Decimos que G es *convexo* si para todo $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{A}$ y todo $\lambda \in (0,1)$ se tiene que:

$$G(\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2) \leq \lambda G(\phi_1) + (1-\lambda)G(\phi_2).$$

Teorema 2.15 *([7],Prop.II.1.2)*. *Sea $\mathcal{W}$ un espacio de Banach reflexivo. Sea $G : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ convexo s.c.i. Supongamos que $\mathcal{A}$ es acotado o que*

$$\lim_{\substack{\phi \in \mathcal{A} \\ \|\phi\| \to \infty}} G[\phi] = \infty.$$

Entonces G alcanza su mínimo en $\mathcal{A}$, es decir, $\exists w_0 \in \mathcal{A}$ tal que $G(w_0) \leq G(w)\ \forall w \in \mathcal{A}$. Si además G es estrictamente convexo el mínimo se alcanza en un único punto.

Si $G : \mathcal{W} \to \mathbb{R}$ es cóncavo s.c.s entonces $-G$ es convexo s.c.i, luego el teorema anterior nos dice que si A es acotado o $\lim_{\substack{\phi \in \mathcal{A} \\ \|\phi\| \to \infty}} G[\phi] = -\infty$ entonces G alcanza su máximo en A y si G es estrictamente cóncavo el máximo se alcanza en un único punto.

Proposición 2.16. *Sea $f_\lambda : \mathcal{W} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ una familia de funciones convexas s.c.i. Entonces se tiene que la función definida por*

$$f(x) = \sup_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$$

también es convexa y s.c.i.

Análogamente, si f_λ es un familia de funciones cóncavas s.c.s, entonces se tiene que la función definida por

$$f(x) = \inf_{\lambda \in \Lambda} f_\lambda(x)$$

también es cóncava y s.c.s.

El resultado anterior puede ser presentado de forma más general, de hecho, toda función convexa, s.c.i y propia puede ser expresada como el supremo de funciones lineales afines. Esto último es una consecuencia directa del teorema de separación de Hahn-Banach.

Definición 2.17. Sean $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ espacios vectoriales y sea $G : \mathcal{S} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, donde $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ es convexo.

(i) Un par $(\phi_0, r_0) \in \mathcal{S} \times \mathcal{V}$ es un *punto silla* de G si

$$G[\phi_0, r] \leq G[\phi_0, r_0] \leq G[\phi, r_0] \ \ \forall (\phi, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{V}. \tag{2.7}$$

(ii) El funcional G es *convexo-cóncavo* si:

$$G[(1-\lambda)\phi_1 + \lambda\phi_2, r] \leq (1-\lambda)G[\phi_1, r] + \lambda G[\phi_2, r] \ \ \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S},\ r \in \mathcal{V},\ \lambda \in [0,1] \text{ y} \tag{2.8}$$

$$G[\phi, (1-\lambda)r_1 + \lambda r_2] \geq (1-\lambda)G[\phi, r_1] + \lambda G[\phi, r_2] \ \ \forall \phi \in \mathcal{S},\ r_1, r_2 \in \mathcal{V},\ \lambda \in [0,1]. \tag{2.9}$$

Si la desigualdades anteriores son estrictas para $\lambda \in (0,1)$ entonces G es estrictamente convexo-cóncavo.

(iii) El funcional G es *Gâteaux diferenciable* en (ϕ_0, r_0) si $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ son espacios normados y las derivadas parciales

$$\langle D_\phi G[\phi_0, r_0], \phi - \phi_0 \rangle := \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{G[\phi_\lambda, r_0] - G[\phi_0, r_0]}{\lambda}, \quad \phi_\lambda = \lambda\phi + (1-\lambda)\phi_0 \tag{2.10}$$

$$\langle D_r G[\phi_0, r_0], r - r_0 \rangle := \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{G[\phi_0, r_\lambda] - G[\phi_0, r_0]}{\lambda}, \quad r_\lambda = \lambda r + (1-\lambda) r_0 \tag{2.11}$$

existen para todo $(\phi, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{V}$ y pueden ser extendidas como funcionales lineales en $\mathcal{W}^*$ y $\mathcal{V}^*$.

Definición 2.18 (*Norma matricial*)**.** Si se tienen norma vectoriales en los espacios K^m y K^n se puede definir la norma inducida correspondiente en el espacio de las matrices m por n:

$$\|A\| := \sup \{ \|Ax\| : x \in K^n \ con \ \|x\| = 1 \}.$$

El operador norma correspondiente a la norma p para vectores es:

$$\|A\|_p := \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}.$$

Definición 2.19 (*Espacios de Bochner,[8], sección.5.9.2*)**.** Sea $(\mathcal{W}, \|\cdot\|_{\mathcal{W}})$ un espacio de Banach real. El espacio $\mathcal{L}^p(0, T; \mathcal{W})$ consiste de todas las funciones medibles $f : [0, T] \to \mathcal{W}$ tal que

$$\|f\|_{\mathcal{L}^p(0,T;\mathcal{W})} := \left(\int_0^T \|f(t)\|_{\mathcal{W}}^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

para $1 \leq p < \infty$, y

$$\|f\|_{\mathcal{L}^\infty(0,T;\mathcal{W})} := \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t)\|_{\mathcal{W}} < \infty.$$

El espacio de Sobolev $\mathcal{H}^1(0, T; \mathcal{W})$ consiste de todas las funciones $f \in \mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{W})$ tal que f' existe en el sentido débil y pertenece a $\mathcal{L}^2(0, T; \mathcal{W})$. Además,

$$\|f\|_{\mathcal{H}^1(0,T;\mathcal{W})} := \left(\int_0^T \|f(t)\|_{\mathcal{W}}^2 + \|f'(t)\|_{\mathcal{W}}^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

El siguiente resultado se demuestra fácilmente por inducción.

Lema 2.20 (Lema de Gronwall discreto)**.** *Sea* $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ *una sucesión de numeros reales,* $y_n \geq 0$ *tal que*

$$y_{n+1} \leq (1+A)y_n + B \;\; n = 0, 1, \ldots$$

con $A > 0$*,* $B \geq 0$*, entonces*

$$y_n \leq (1+A)^n y_0 + \frac{(1+A)^n - 1}{A} B, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

En particular,

$$y_n \leq e^{nA} y_0 + \frac{e^{nA} - 1}{A} B, \;\; n = 0, 1, \ldots$$

Capítulo 3

Teoría minimax

En este capítulo se enuncian varios resultados del análisis convexo y la teoría minimax (ver [7, Cap.VI, Props. 1.5, 1.6 y 2.2]), que serán utilizados en el teorema principal de los capítulos 4 y 5.

Proposición 3.1. *Sean $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ espacios de Banach reflexivos. Supongamos que $\emptyset \neq \mathcal{S} \subset \mathcal{W}$ es cerrado y convexo y que $G : \mathcal{S} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional convexo-cóncavo. Además supongamos que*

(a) Para todo $\phi \in \mathcal{S}, r \longmapsto G(\phi, r)$ es semicontinua superiormente (s.c.s) y

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{r\in\mathcal{V} \\ \|r\|\to\infty}} G[\phi, r] = -\infty.$

(c) Para todo $r \in \mathcal{V}, \phi \longmapsto G(\phi, r)$ es semicontinua inferiormente (s.c.i) y

(d) $\displaystyle\lim_{\substack{\phi\in\mathcal{S} \\ \|\phi\|\to\infty}} G[\phi, r] = \infty.$

Entonces, G tiene al menos un punto silla (ϕ_0, r_0) y todo punto silla es tal que

$$G[\phi_0, r_0] = \min_{\phi\in\mathcal{S}} \max_{r\in\mathcal{V}} G[\phi, r] = \max_{r\in\mathcal{V}} \min_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi, r].$$

Si, por otro lado, G es Gâteaux diferenciable, entonces (ϕ_0, r_0) es un punto silla de G si y sólo si satisface la forma débil de las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\langle D_\phi G, \phi - \phi_0 \rangle \geq 0, \quad \langle D_r G, r - r_0 \rangle \leq 0 \;\; \forall \phi \in \mathcal{S}, r \in \mathcal{V}.$$

Si, además, G es estrictamente convexo-cóncavo, entonces el punto silla es único.

Demostración. Para demostrar la primera parte de esta proposición probaremos unas afirmaciones previas:

Afirmación 1. *Si existen $\phi_0 \in \mathcal{S}$, $r_0 \in \mathcal{V}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que*

$$G[\phi_0, r] \leq \alpha \quad \forall r \in \mathcal{V} \text{ y} \tag{3.1}$$
$$G[\phi, r_0] \geq \alpha \quad \forall \phi \in \mathcal{S}, \tag{3.2}$$

entonces (ϕ_0, r_0) es punto silla de G.

Demostración. Aplicando (3.1) a $r = r_0$ y (3.2) a $\phi = \phi_0$ vemos que $\alpha = G[\phi_0, r_0]$ y

$$G[\phi_0, r] \leq G[\phi_0, r_0] \leq G[\phi, r_0] \quad \forall \phi \in \mathcal{S}, \forall r \in \mathcal{V},$$

es decir (ϕ_0, r_0) es punto silla de G. □

Afirmación 2. *Supongamos que $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ son espacios de Banach reflexivos, $\emptyset \neq \mathcal{A} \subset \mathcal{W}$ y $\emptyset \neq \mathcal{B} \subset \mathcal{V}$ son cerrados, acotados y convexos y $G : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un funcional convexo-cóncavo. Supongamos además que (a) se cumple para todo $\phi \in \mathcal{A}$ y (c) se cumple para todo $r \in \mathcal{B}$. Entonces G posee al menos un punto silla (ϕ_0, r_0) en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$.*

Demostración. Primero consideremos el caso en que

$$\forall r \in \mathcal{B}, \quad \phi \longmapsto G[\phi, r] \text{ es estrictamente convexo.} \tag{3.3}$$

Como $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ son espacios reflexivos, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son compactos en la topología débil de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente. Además la propiedad de semicontinuidad superior e inferior de G son también verdaderas para la topología débil de $\mathcal{W}$ y $\mathcal{V}$ respectivamente. Bajo estas condiciones, $\forall r \in \mathcal{B}$, la función $\phi \longmapsto G[\phi, r]$ por ser débilmente s.c.i es acotada por abajo en $\mathcal{A}$ y alcanza su mínimo en un único punto por (3.3). Sea $g(r)$ este mínimo y $e(r) \in \mathcal{A}$ el punto donde el mínimo se alcanza, es decir,

$$g(r) = \min_{\phi \in \mathcal{A}} G[\phi, r] = G[e(r), r].$$

En vista de (2.16) la función $r \longmapsto g(r)$ es cóncava y débilmente s.c.s por ser el ínfimo de una familia de funciones cóncavas; por lo tanto está acotada por arriba y alcanza su cota superior en un punto r_0:

$$g(r_0) = \max_{r \in \mathcal{B}} g(r) = \max_{r \in \mathcal{B}} \min_{\phi \in \mathcal{A}} G[\phi, r] \tag{3.4}$$
$$g(r_0) \leq G[\phi, r_0], \quad \forall \phi \in \mathcal{A}. \tag{3.5}$$

Ahora, para $\phi \in \mathcal{A}$, $r \in \mathcal{B}$ y $\lambda \in (0, 1)$, como $G[\phi, \cdot]$ es cóncavo,

$$G[\phi, (1 - \lambda) r_0 + \lambda r] \geq (1 - \lambda) G[\phi, r_0] + \lambda G[\phi, r]$$

En particular, tomando $\phi = e_\lambda := e((1-\lambda)r_0 + \lambda r)$, se tiene

$$\begin{aligned} g(r_0) &\geq g((1-\lambda)r_0 + \lambda r) = G[e_\lambda, (1-\lambda)r_0 + \lambda r] \\ &\geq (1-\lambda)G[e_\lambda, r_0] + \lambda G[e_\lambda, r] \end{aligned}$$

por ser $\mathcal{A}$ convexo y por (3.5)

$$\geq (1-\lambda)g(r_0) + \lambda G[e_\lambda, r]$$

entonces,

$$g(r_0) \geq G[e_\lambda, r], \quad \forall r \in \mathcal{B}. \tag{3.6}$$

Como $\mathcal{A}$ es secuencialmente compacto en la topología débil, podemos extraer de $\{e_\lambda\}_{\lambda\in(0,1)}$ una sucesión, $\{e_{\lambda_n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, con $\lambda_n \longrightarrow 0$ que converge débilmente a algún límite ϕ_0. Luego tenemos que $\phi_0 = e(r_0)$: en efecto, por definición de e_λ

$$G[e_\lambda, (1-\lambda)r_0 + \lambda r] \leq G[\phi, (1-\lambda)r_0 + \lambda r] \quad \forall \phi \in \mathcal{A};$$

como $G[\phi, \cdot]$ es cóncavo

$$(1-\lambda)G[e_\lambda, r_0] + \lambda G[e_\lambda, r] \leq G[\phi, (1-\lambda)r_0 + \lambda r] \quad \forall \phi \in \mathcal{A}.$$

Además $G[e_\lambda, r]$ es acotado por abajo por $g(r)$; tomado el límite $\lambda_n \to 0$ en la última desigualdad se tiene,

$$\begin{aligned} G[\phi_0, r_0] &\leq \liminf_{\lambda_n \longrightarrow 0} G[e_{\lambda_n}, r_0] \\ &\leq \liminf_{\lambda_n \longrightarrow 0} G[\phi, (1-\lambda_n)r_0 + \lambda_n r] \\ &\leq \limsup_{\lambda_n \longrightarrow 0} G[\phi, (1-\lambda_n)r_0 + \lambda_n r], \end{aligned}$$

por lo tanto $\phi_0 = e(r_0)$. En particular vemos (por (3.3)) que el límite $\phi_0 = e(r_0)$ es independiente de r y de la sucesión escogida $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Con esto podemos pasar el limite en (3.6). Usando nuevamente la concavidad y s.c.s de $G[\phi, \cdot]$, tenemos,

$$g(r_0) \geq G[\phi_0, r], \quad \forall r \in \mathcal{B}. \tag{3.7}$$

Luego de (3.5),(3.7) y *Afirmación* 1, (ϕ_0, r_0) es punto silla de G.

Ahora si G no satisface la hipótesis (3.3), introducimos los Lagrangianos perturbados G_ε,

$$G_\varepsilon[\phi, r] = G[\phi, r] + \varepsilon \|\phi\|_{\mathcal{W}}, \quad \varepsilon > 0,$$

definidos en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, los cuales satisfacen las mismas hipótesis de G y también (3.3) (pues como $\mathcal{W}$ es espacio de Banach reflexivo, podemos asumir que la norma en $\mathcal{W}$

es estrictamente convexa (ver [2])). Aplicando el mismo razonamiento que antes, obtenemos para G_ε la existencia de un punto silla $(\phi_\varepsilon^0, r_\varepsilon^0)$ en $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$:

$$G[\phi_\varepsilon^0, r] + \varepsilon \left\|\phi_\varepsilon^0\right\|_{\mathcal{W}} \leq G[\phi_\varepsilon^0, r_\varepsilon^0] + \varepsilon \left\|\phi_\varepsilon^0\right\|_{\mathcal{W}} \leq G[\phi, r_\varepsilon^0] + \varepsilon \left\|\phi\right\|_{\mathcal{W}} \quad \forall \phi \in \mathcal{A}, \forall r \in \mathcal{B}. \tag{3.8}$$

Por compacidad débil de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, existe una sucesión $\varepsilon_n \longrightarrow 0$ tal que

$$\begin{aligned} \phi_{\varepsilon_n}^0 &\rightharpoonup \phi_0 \text{ en } \mathcal{W} \\ r_{\varepsilon_n}^0 &\rightharpoonup r_0 \text{ en } \mathcal{V} \end{aligned}$$

Tomado el límite en (3.8) y usando que $G[\phi, \cdot]$ es s.c.s y $G[\cdot, r]$ es s.c.i, se tiene

$$G[\phi_0, r] \leq \liminf_{n \to \infty} G[\phi_{\varepsilon_n}^0, r_{\varepsilon_n}^0] \leq G[\phi, r_0] \quad \forall \phi \in \mathcal{S}, \forall r \in \mathcal{B},$$

lo cual prueba que (ϕ_0, r_0) es punto silla de G. □

Ahora podemos probar la primera parte de la proposición. Sea $\mu > 0$ fijo, y sean

$$\mathcal{S}_\mu = \{\phi \in \mathcal{S} |\, \|\phi\| \leq \mu\},$$

$$\mathcal{V}_\mu = \{r \in \mathcal{V} |\, \|r\| \leq \mu\},$$

Los conjuntos $\mathcal{S}_\mu$ y $\mathcal{V}_\mu$ son cerrados, conexos y acotados. Por *Afirmación 2*, G posee un punto silla (ϕ_μ^0, r_μ^0) en $\mathcal{S}_\mu \times \mathcal{V}_\mu$, es decir,

$$G[\phi_\mu^0, r] \leq G[\phi_\mu^0, r_\mu^0] \leq G[\phi, r_\mu^0] \quad \forall \phi \in \mathcal{S}_\mu, \forall r \in \mathcal{V}_\mu \tag{3.9}$$

El funcional $\phi \longmapsto G[\phi, r]$ es convexo, s.c.i y por hipótesis $\displaystyle\lim_{\substack{\phi \in \mathcal{S} \\ \|\phi\| \to \infty}} G[\phi, r] = \infty$. Luego, es acotado por abajo, i.e.:

$$-\infty < a \leq G[\phi, r] \quad \forall \phi \in \mathcal{S},$$

en particular,

$$-\infty < a \leq G[\phi_\mu^0, r] \quad \forall \mu. \tag{3.10}$$

Análogamente, $r \longmapsto G[\phi, r]$ es cóncavo, s.c.s. y coercivo, por tanto es acotado por arriba, i.e.:

$$G[\phi, r] \leq b < \infty \quad \forall r \in \mathcal{V},$$

en particular,

$$G[\phi, r_\mu^0] \leq b < \infty \quad \forall \mu. \tag{3.11}$$

De (3.9), (3.10) y (3.11)

$$G[\phi^0_\mu, r] \leq b < \infty \quad \forall \mu \quad \text{y} \tag{3.12}$$
$$G[\phi, r^0_\mu] \geq a > -\infty \quad \forall \mu. \tag{3.13}$$

Como $\lim\limits_{\substack{\phi\in\mathcal{S}\\ \|\phi\|\to\infty}} G[\phi, r] = \infty$ y (3.12) (resp. $\lim\limits_{\substack{r\in\mathcal{V}\\ \|r\|\to\infty}} G[\phi, r] = -\infty$ y (3.13)) la sucesión ϕ^0_μ (resp. r^0_μ) es acotada independientemente de μ. Además los números $G[\phi^0_\mu, r^0_\mu]$ son acotados, entonces existe una sucesión $\mu_j \longrightarrow 0$ tal que

$$G[\phi^0_{\mu_j}, r^0_{\mu_j}] \longrightarrow \alpha,$$
$$\phi^0_{\mu_j} \rightharpoonup \phi_0 \text{ en } \mathcal{S} \text{ y}$$
$$r^0_{\mu_j} \rightharpoonup r_0 \text{ en } \mathcal{V}.$$

Por (3.9)

$$G[\phi_0, r] \leq \alpha \leq G[\phi, r_0] \quad \forall \phi \in \mathcal{S}, \forall r \in \mathcal{V},$$

luego (ϕ_0, r_0) es punto silla de G en $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$.

Notamos además que:

Afirmación 3. *$G : \mathcal{S} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}$ tiene un punto silla (ϕ_0, r_0) en $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$ si y sólo si*

$$\max_{r\in\mathcal{V}} \inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi, r] = \min_{\phi\in\mathcal{S}} \sup_{r\in\mathcal{V}} G[\phi, r]. \tag{3.14}$$

Adicionalmente, si $(\phi_0, r_0) \in \mathcal{S} \times \mathcal{V}$ es un punto silla, entonces el valor común de (3.14) es $G[\phi_0, r_0]$. (Al escribir $\max\limits_{r\in\mathcal{V}}$ en vez de $\sup\limits_{r\in\mathcal{V}}$ estamos haciendo énfasis en que el supremo se alcanza; análogamente con $\min\limits_{\phi\in\mathcal{S}}$ en vez de $\inf\limits_{\phi\in\mathcal{S}}$).

Demostración. En efecto, primero supongamos que existe (ϕ_0, r_0) punto silla de G, luego por definición (2.7) se tiene que

$$\sup_{r\in\mathcal{V}} G[\phi_0, r] = G[\phi_0, r_0] = \inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi, r_0], \tag{3.15}$$

pero

$$\inf_{\phi\in\mathcal{S}} \sup_{r\in\mathcal{V}} G[\phi, r] \leq \sup_{r\in\mathcal{V}} G[\phi_0, r], \tag{3.16}$$
$$\inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi, r_0] \leq \sup_{r\in\mathcal{V}} \inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi, r_0]. \tag{3.17}$$

Por lo tanto,

$$\inf_{\phi\in\mathcal{S}} \sup_{r\in\mathcal{V}} G[\phi, r] \leq \sup_{r\in\mathcal{V}} \inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi, r_0]. \tag{3.18}$$

Por otro lado, siempre tenemos que

$$\inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi,r] \le G[\varphi,r] \ \ \forall\varphi\in\mathcal{S},\forall r\in\mathcal{V},$$

luego

$$\sup_{r\in\mathcal{V}}\inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi,r] \le \sup_{r\in\mathcal{V}} G[\varphi,r] \ \ \forall\varphi\in\mathcal{S}$$

y

$$\sup_{r\in\mathcal{V}}\inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi,r] \le \inf_{\varphi\in\mathcal{S}}\sup_{r\in\mathcal{V}} G[\varphi,r]. \tag{3.19}$$

De (3.19) tenemos que (3.18) se convierte en igualdad. Lo que implica que (3.15), (3.16) y (3.17) son también igualdades, de donde

$$G[\phi_0,r_0] = \sup_{r\in\mathcal{V}} G[\phi_0,r] = \min_{\phi\in\mathcal{S}}\sup_{r\in\mathcal{V}} G[\phi,r] = \inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi,r_0] = \max_{r\in\mathcal{V}}\inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi,r_0].$$

Por el contrario, supongamos que (3.14) se cumple, por lo tanto el mínimo se alcanza en ϕ_0 y el máximo se alcanza en r_0. Claramente,

$$\inf_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi,r_0] \le G[\phi,r_0] \le \sup_{r\in\mathcal{V}} G[\phi_0,r] \tag{3.20}$$

luego de (3.14), la desigualdad en (3.20) se transforma en igualdad, lo cual muestra que (ϕ_0,r_0) es punto silla de G. □

En conclusión, por lo demostrado anteriormente y la *afirmación* 3, G tiene al menos un punto silla y todo punto silla (ϕ_0,r_0) es tal que

$$G[\phi_0,r_0] = \min_{\phi\in\mathcal{S}}\max_{r\in\mathcal{V}} G[\phi,r] = \max_{r\in\mathcal{V}}\min_{\phi\in\mathcal{S}} G[\phi,r].$$

Si, por otro lado, G es Gâteaux diferenciable, entonces (ϕ_0,r_0) es un punto silla de G si y sólo si satisface la forma débil de las ecuaciones de Euler-Lagrange:

$$\langle D_\phi G,\phi-\phi_0\rangle \ge 0, \quad \langle D_r G, r-r_0\rangle \le 0 \ \ \forall\phi\in\mathcal{S}, r\in\mathcal{V}. \tag{3.21}$$

En efecto, si (ϕ_0,r_0) es punto silla de G, como $\mathcal{S}$ es convexo $(1-\lambda)\phi_0+\lambda\phi\in\mathcal{S}$, $\forall\phi\in\mathcal{S}$, $\lambda\in(0,1)$, luego por definición de punto silla

$$G[\phi_0,r_0] \le G[(1-\lambda)\phi_0+\lambda\phi,r_0] \ \ \forall\phi\in\mathcal{S},$$

entonces

$$G[(1-\lambda)\phi_0+\lambda\phi,r_0] - G[\phi_0,r_0] \ge 0 \ \ \forall\phi\in\mathcal{S},$$

es decir

$$\frac{G[\phi_0+\lambda(\phi-\phi_0),r_0]-G[\phi_0,r_0]}{\lambda} \ge 0.$$

Tomando $\lim_{\lambda \to 0}$, se tiene que

$$\langle D_\phi G, \phi - \phi_0 \rangle \geq 0.$$

De forma análoga, como $\mathcal{V}$ es convexo $(1-\mu)r_0 + \mu r \in \mathcal{V}, \ \ \forall r \in \mathcal{V}, \ \mu \in (0,1)$, luego por definición de punto silla

$$G[\phi_0, (1-\mu)r_0 + \mu r] \leq G[\phi_0, r_0] \ \ \forall r \in \mathcal{V},$$

entonces

$$G[\phi_0, (1-\mu)r_0 + \mu r] - G[\phi_0, r_0] \leq 0 \ \ \forall r \in \mathcal{V},$$

es decir

$$\frac{G[\phi_0, (1-\mu)r_0 + \mu r] - G[\phi_0, r_0]}{\mu} \leq 0.$$

Tomando $\lim_{\mu \to 0}$, se tiene que

$$\langle D_r G, r - r_0 \rangle \leq 0.$$

Por el contrario, si (ϕ_0, r_0) satisface (3.21), por definición

$$\begin{aligned} 0 \leq \langle D_\phi G, \phi - \phi_0 \rangle &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{G[\phi_0 + \lambda(\phi - \phi_0), r_0] - G[\phi_0, r_0]}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{G[\lambda\phi + (1-\lambda)\phi_0, r_0] - G[\phi_0, r_0]}{\lambda} \end{aligned}$$

y como $\forall r \in \mathcal{S}, \quad \phi \longmapsto G[\phi, r]$ es funcional convexo

$$\begin{aligned} &\leq \lim_{\lambda \to 0} \frac{\lambda G[\phi, r_0] + (1-\lambda)G[\phi_0, r_0] - G[\phi_0, r_0]}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \to 0} (G[\phi, r_0] - G[\phi_0, r_0]) \\ &= G[\phi, r_0] - G[\phi_0, r_0]. \end{aligned}$$

Entonces,

$$G[\phi_0, r_0] \leq G[\phi, r_0] \ \ \forall \phi \in \mathcal{S}. \tag{3.22}$$

Análogamente, se tiene que

$$\forall r \in \mathcal{V}, \ \ G[\phi_0, r] - G[\phi_0, r_0] \leq \langle D_r G, r - r_0 \rangle \leq 0.$$

Entonces,

$$G[\phi_0, r] \leq G[\phi_0, r_0] \ \ \forall r \in \mathcal{V}. \tag{3.23}$$

Por lo tanto de (3.22) y (3.23) (ϕ_0, r_0) es punto silla de G, con lo que se tiene la segunda parte de la proposición.

Por último, queremos probar que si además G es estrictamente convexo-cóncavo, entonces el punto silla es único. Para esto tenemos las siguientes afirmaciones previas:

Afirmación 4. *El conjunto de puntos sillas de G es de la forma $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{V}_0$ donde $\mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}$ y $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}$.*

Demostración. Debemos probar que si por ejemplo (ϕ_0, r_0) y (ϕ_1, r_1) son dos puntos sillas de G en $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$, entonces también lo es (ϕ_1, r_0). Por la *Afirmación 3*, $\alpha = G[\phi_0, r_0] = G[\phi_1, r_1]$ y por definición de (ϕ_0, r_0), (ϕ_1, r_1),

$$G[\phi_1, r] \leq \alpha \;\; \forall r \in \mathcal{V}$$

$$G[\phi, r_0] \geq \alpha \;\; \forall \phi \in \mathcal{S}$$

. La *Afirmación 1* implica que (ϕ_1, r_0) es punto silla. □

Afirmación 5. *El conjunto $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{V}_0$ de los puntos sillas de G es convexo.*

Demostración. Supongamos $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{V}_0$ es no vacío y sea $\alpha = \inf_{\phi \in \mathcal{S}} \sup_{r \in \mathcal{V}} G[\phi, r] = \sup_{r \in \mathcal{V}} \inf_{\phi \in \mathcal{S}} G[\phi, r]$. Si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}_0$ y $\lambda \in (0, 1)$ tenemos

$$G[\phi_1, r] \leq \alpha, \;\; G[\phi_2, r] \leq \alpha \;\; \forall r \in \mathcal{V}$$

y como $\forall r \in \mathcal{V}, \; \phi \longmapsto G[\phi, r]$ es convexo,

$$G[\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2, r] \leq \lambda G[\phi_1, r] + (1-\lambda)G[\phi_2, r] \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha.$$

Por otro lado $G[\phi, r_1] \geq \alpha \quad \forall \phi \in \mathcal{S}, \forall r_1 \in \mathcal{V}_0$, lo cual muestra, junto con la *Afirmación 1*, que $(\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2, r_1)$ es punto silla de G, luego $\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2 \in \mathcal{S}_0$, es decir $\mathcal{S}_0$ es convexo. Análogamente se prueba que $\mathcal{V}_0$ es convexo. □

Vemos que, si G es estrictamente convexo con respecto a $\phi, \forall r \in \mathcal{V}$, entonces el conjunto $\mathcal{S}_0$ de las afirmaciones previas se reduce a un punto. En efecto, si $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{S}_0$ con $\phi_1 \neq \phi_2$ tendríamos

$$G[\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2, r_1] < \lambda G[\phi_1, r_1] + (1-\lambda)G[\phi_2, r_1] = \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha,$$

lo cual es una contradicción pues $G[\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2, r_1] = \alpha$, ya que $\lambda\phi_1 + (1-\lambda)\phi_2 \in \mathcal{S}_0$. Análogamente se prueba que si G es estrictamente cóncavo con respecto a $r, \forall \phi \in \mathcal{S}$, entonces $\mathcal{V}_0$ se reduce a un punto. Por lo tanto el punto silla es único, lo cual termina la demostración de la proposición. □

Capítulo 4

Formulación variacional para el modelo de monodominio

Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ el dominio físico de interés donde N es cualquier entero positivo, $\phi : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es el potencial transmembranal (reescalado), y $r = (r_1, \ldots r_M) : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^M$ es una variable interna vectorial que controla la recuperación de la célula. El problema general electrofisiológico puede ser escrito en términos de un sistema de ecuaciones no lineales de reacción-difusión:

$$C_\phi \dot{\phi} + \operatorname{div} q = f^\phi(\phi, r), \tag{4.1}$$

$$C_r \dot{r} = f^r(\phi, r), \tag{4.2}$$

donde $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ denota la derivada con respecto al tiempo, $C_\phi \in \mathbb{R}^+$ y $C_r \in \mathbb{R}^{M \times M}$ es un tensor simétrico y definido positivo. Aquí hemos considerado la formulación simplificada de monodominio la cual sólo depende del potencial transmembranal y de variables internas, en lugar de la formulación de bidominio, donde tanto el potenciales intracelular como el extracelular necesitan ser descritos independientemente (la formulación en bidominio la realizaremos en el *Capítulo* 5). El término de flujo q caracteriza la propagación natural de ondas de excitación, la cual asumimos toma la forma (Ley de Fick):

$$q = -D \nabla \phi \tag{4.3}$$

donde $D \in \mathbb{R}_+^{N \times N}$ es un tensor de conductividad simétrico y definido positivo. Las ecuaciones gobernantes se complementan con las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann,

$$\phi = \bar{\phi}, \quad x \in \partial \mathcal{B}_\phi, \tag{4.4}$$

$$q \cdot n = \bar{q}, \quad x \in \partial \mathcal{B}_q, \tag{4.5}$$

donde la frontera de potencial $\partial\mathcal{B}_\phi$ y la frontera de flujo $\partial\mathcal{B}_q$ son partes Dirichlet y Neumann de la frontera $\partial\mathcal{B}$ del dominio tal que $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_\phi \cup \partial\mathcal{B}_q$ y $\partial\mathcal{B}_\phi \cap \partial\mathcal{B}_q = \emptyset$. Las condiciones iniciales,

$$\phi|_{t=0} = \phi_0(x),$$
$$r|_{t=0} = r_0(x).$$

La elección de la variable de recuperación r y los términos fuente f^ϕ y $f^r = (f_1^r, \ldots, f_M^r)$ determinan la formulación particular electrofisiológica, y existe una gran variedad de formulaciones diferentes en la literatura. Para una revisión extensa de los modelos electrofisiológicos más populares, ver [9]. La existencia y unicidad del problema electrofisiológico de monodominio ha sido estudiada por Colli Franzone y Savaré [6].

Consideremos ahora la integración temporal de las ecuaciones de electrofisiología (4.1) y (4.2). Tomamos el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$, $n \in \mathbb{Z}$ donde la información en $t = t_n$ se asume conocida. Usando una discretización temporal Backward-Euler en diferencias finitas, obtenemos las siguientes ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas:

$$C_\phi \frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\tau} - \operatorname{div}(D\nabla\phi_{n+1}) = f^\phi(\phi_{n+1}, r_{n+1}), \tag{4.6}$$

$$C_r \frac{r_{n+1} - r_n}{\tau} = f^r(\phi_{n+1}, r_{n+1}), \tag{4.7}$$

donde $\tau = t_{n+1} - t_n$. Este método de discretización temporal ha sido ampliamente usado en la resolución numérica de ecuaciones electrofisiológicas [[11], [18], [13]] debido a consideraciones de estabilidad, a costa de resolver un problema no lineal en cada paso de tiempo. En este trabajo estudiaremos la estructura matemática de estas ecuaciones y las implicaciones numéricas de ésta.

4.1. Potenciales generalizados y reformulación de flujo de gradiente

En esta sección buscamos reformular el problema electrofisiológico como un sistema de flujo de gradiente. Sea $\mathcal{E}$ el potencial electroquímico generalizado, y Ψ el potencial de tasa. Un sistema tiene una estructura de flujo de gradiente si las ecuaciones gobernantes pueden escribirse como

$$0 \in \partial\Psi + D\mathcal{E}, \tag{4.8}$$

donde D es la derivada de Fréchet y ∂ es el operador subdiferencial. Referimos al lector a [1] para ver más acerca de la aplicación de subdiferenciales en problemas de reacción-difusión y de flujo de gradiente. En (4.8), $D\mathcal{E}$ representa una fuerza de conducción que controla la evolución del sistema. Para el modelo electrofisiológico general, definimos el potencial electroquímico generalizado como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}[\phi, r] :&= \int_{\mathcal{B}} E(\phi, \nabla\phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}\cdot\phi\, dS\\ &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot D\nabla\phi + F(\phi, r) \right\} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}\cdot\phi\, dS,\end{aligned} \tag{4.9}$$

donde $E : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ es la densidad del potencial electroquímico, y $F : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial\phi} = -f^{\phi}(\phi, r) \tag{4.10}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = f_i^r(\phi, r), \quad i = 1, \ldots, M. \tag{4.11}$$

Definimos el potencial de tasa como

$$\Psi[\dot{\phi}, \dot{r}] := \int_{\mathcal{B}} \psi(\dot{\phi}, \dot{r})\, dx = \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}C_\phi\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\dot{r}\cdot C_r\dot{r} \right\} dx.$$

Se sigue que las ecuaciones (4.1) y (4.2) pueden ser recuperadas a partir de los potenciales recién definidos, lo que otorga al modelo general electrofisiológico una estructura de flujo de gradiente. En efecto,

$$0 \in \partial\Psi + D\mathcal{E} \iff \langle \partial\Psi + D\mathcal{E}, (\eta,\xi)\rangle = 0 \quad \forall(\eta,\xi) \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}\times\mathbb{R}^M),$$

en este caso $\partial\Psi$ equivalente a la derivada de Frechet $D\Psi$, luego

$$\begin{aligned}&0 \in \partial\Psi + D\mathcal{E} \iff \langle D\Psi + D\mathcal{E}, (\eta,\xi)\rangle = 0 \;\; \forall(\eta,\xi) \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}\times\mathbb{R}^M)\\ &\iff \left\langle D_u\Psi[\dot{\phi}, \dot{r}] + D_\phi\mathcal{E}[\phi, r], \eta\right\rangle = 0 \text{ y } \left\langle D_v\Psi[\dot{\phi}, \dot{r}] + D_r\mathcal{E}[\phi, r], \xi\right\rangle = 0,\end{aligned} \tag{4.12}$$

definiendo $u := \dot{\phi}$ y $v := \dot{r}$.

Probaremos que podemos recuperar las ecuaciones asumiendo que tanto $\mathcal{E}$ como Ψ poseen condiciones necesarias para aplicar el teorema de convergencia dominada (TCD), condiciones que se señalarán más adelante. Para $\lambda \in (0, 1)$, primero tenemos que:

$$\begin{aligned}\langle D_\phi\mathcal{E}[\phi, r], \eta\rangle &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\mathcal{E}[\phi+\lambda\eta, r] - \mathcal{E}[\phi, r]}{\lambda}\\ &= \lim_{\lambda\to 0} \left\{ \int_{\mathcal{B}} \frac{E[\phi+\lambda\eta, \nabla(\phi+\lambda\eta), r] - E[\phi, \nabla\phi, r]}{\lambda}\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}\cdot\eta\, dS \right\}.\end{aligned}$$

Como $\eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R})$, la integral sobre $\partial\mathcal{B}_q$ es nula, nos queda

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left\{E[\phi + \lambda\eta, \nabla(\phi + \lambda\eta), r]\right\}\bigg|_{\lambda=0} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \nabla\eta \cdot D\nabla(\phi + \lambda\eta) + \frac{\partial F}{\partial\phi}(\phi + \lambda\eta, r)\eta \right\}\bigg|_{\lambda=0} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \nabla\eta \cdot D\nabla\phi + \frac{\partial F}{\partial\phi}(\phi, r)\eta \right\} dx.
\end{aligned}
$$

Reemplazando (4.10), obtenemos

$$
= \int_{\mathcal{B}} \nabla\eta \cdot D\nabla\phi \, dx - \int_{\mathcal{B}} f^{\phi}(\phi, r)\eta \, dx,
$$

e integrando por partes (suponiendo que $\phi \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$ y que $\partial\mathcal{B}$ es lo suficientemente suave),

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{B}} -D\Delta\phi\eta \, dx - \int_{\mathcal{B}} f^{\phi}(\phi, r)\eta \, dx \\
&= \left\langle -D\Delta\phi - f^{\phi}(\phi, r), \eta \right\rangle,
\end{aligned}
$$

usando (4.3),

$$
= \left\langle \operatorname{div} q - f^{\phi}(\phi, r), \eta \right\rangle \quad \forall\eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}).
$$

Por lo tanto,

$$
\langle D_\phi \mathcal{E}[\phi, r], \eta \rangle = \left\langle \operatorname{div} q - f^{\phi}(\phi, r), \eta \right\rangle \quad \forall\eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}) \tag{4.13}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\left\langle D_u \Psi[\dot{\phi}, \dot{r}], \eta \right\rangle &= \langle D_u \Psi[u, v], \eta \rangle \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\Psi[u + \lambda\eta, v] - \Psi[u, v]}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathcal{B}} \frac{\psi[u + \lambda\eta, v] - \psi[u, v]}{\lambda} \, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left\{\psi[u + \lambda\eta, v]\right\}\bigg|_{\lambda=0} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} C_\phi (u + \lambda\eta)\eta\big|_{\lambda=0} \, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} C_\phi u\eta \, dx \\
&= \langle C_\phi u, \eta \rangle \quad \forall\eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\begin{aligned}
\langle D_u \Psi[u,v], \eta \rangle &= \langle C_\phi u, \eta \rangle\,, \\
\left\langle D_u \Psi[\dot{\phi}, \dot{r}], \eta \right\rangle &= \left\langle C_\phi \dot{\phi}, \eta \right\rangle \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}).
\end{aligned} \tag{4.14}
$$

Uniendo (4.12), (4.13) y (4.14),

$$
\begin{aligned}
&\left\langle D_u \Psi[\dot{\phi}, \dot{r}] + D_\phi \mathcal{E}[\phi, r], \eta \right\rangle = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}) \\
&\qquad \Longleftrightarrow \left\langle C_\phi \dot{\phi}, \eta \right\rangle + \left\langle \operatorname{div} q - f^\phi(\phi, r), \eta \right\rangle = 0 \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}) \\
&\qquad \Longleftrightarrow C_\phi \dot{\phi} + \operatorname{div} q = f^\phi(\phi, r);
\end{aligned}
$$

esta última corresponde a la ecuación (4.1).

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\langle D_r \mathcal{E}[\phi, r], \xi \rangle &= \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{E}[\phi, r + \lambda \xi] - \mathcal{E}[\phi, r]}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0} \int_{\mathcal{B}} \frac{E[\phi, \nabla \phi, r + \lambda \xi] - E[\phi, \nabla \phi, r]}{\lambda}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ E[\phi, \nabla \phi, r + \lambda \xi] \right\} \Big|_{\lambda = 0} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial F}{\partial r_i}(\phi, r + \lambda \xi) \xi_i \Big|_{\lambda = 0} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial F}{\partial r_i}(\phi, r) \xi_i \, dx.
\end{aligned}
$$

Reemplazando (4.11), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{M} f_i^r(\phi, r) \xi_i \, dx \\
&= \langle f^r(\phi, r), \xi \rangle \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\langle D_r \mathcal{E}[\phi, r], \xi \rangle = \langle f^r(\phi, r), \xi \rangle \quad \forall \xi \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M). \tag{4.15}
$$

Además,

$$\begin{aligned}\left\langle D_v\Psi[\dot{\phi},\dot{r}],\xi\right\rangle &= \langle D_v\Psi[u,v],\xi\rangle\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\Psi[u,v+\lambda\xi]-\Psi[u,v]}{\lambda}\\ &= \lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathcal{B}}\frac{\psi[u,v+\lambda\xi]-\psi[u,v]}{\lambda}\,dx\\ &= \int_{\mathcal{B}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\psi[u,v+\lambda\xi]\right\}\Big|_{\lambda=0}\,dx\\ &= \int_{\mathcal{B}}-\xi\cdot C_r(v+\lambda\xi)|_{\lambda=0}\,dx\\ &= \int_{\mathcal{B}}-\xi\cdot C_r v\,dx\\ &= \langle -C_r v,\xi\rangle\quad\forall\eta\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^M).\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}\langle D_v\Psi[u,v],\xi\rangle &= \langle -C_r v,\xi\rangle\\ \left\langle D_v\Psi[\dot{\phi},\dot{r}],\xi\right\rangle &= \langle -C_r\dot{r},\xi\rangle\quad\forall\xi\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^M).\end{aligned}\tag{4.16}$$

Así de (4.12), (4.15) y (4.16),

$$\begin{aligned}\left\langle D_v\Psi[\dot{\phi},\dot{r}]+D_r\mathcal{E}[\phi,r],\xi\right\rangle &= 0\ \ \forall\xi\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^M)\\ &\iff \langle -C_r\dot{r},\xi\rangle+\langle f^r(\phi,r),\xi\rangle = 0\ \ \forall\xi\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^M)\\ &\iff C_r\dot{r}=f^r(\phi,r);\end{aligned}$$

esta última corresponde a la ecuación (4.2).

Notar de las definiciones de los potenciales que mientras el potencial de tasa es un funcional estrictamente convexo en $\dot{\phi}$, el potencial electroquímico puede no ser convexo en ϕ.

4.2. Discretización del tiempo: formulación variacional incremental

A continuación, nos basamos en ideas de la comunidad de mecánica de sólidos [10, 14] y desarrollamos una formulación variacional incremental particionando el espacio temporal en una sucesión de intervalos finitos. Antes de presentar nuestros resultados introduciremos algunas suposiciones y notaciones. La densidad del potencial incremental se define como,

$$g_n(\phi, \nabla\phi, r) := \tau\psi\left(\frac{\phi - \phi_n}{\tau}, \frac{r - r_n}{\tau}\right) + E(\phi, \nabla\phi, r) \tag{4.17}$$

donde $\tau = t_{n+1} - t_n$, y el correspondiente incremento de potencial es definido como,

$$G_n[\phi, r] := \int_{\mathcal{B}} g_n(\phi, \nabla\phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \phi\, dS. \tag{4.18}$$

En lo que sigue se supondrá que el potencial $F(\phi, r)$ en (4.9) es de clase $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R})$ y que existen exponentes $\gamma \geq 2$ y $2^* := \dfrac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$ tal que

$$|F(\phi, r)| \leq A\left(|\phi|^{2^*} + |r|^{\gamma} + 1\right), \tag{4.19}$$

$$\left|f^{\phi}(\phi, r)\right| \leq A\left(|\phi|^{2^*-1} + |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}} + 1\right), \text{ y} \tag{4.20}$$

$$|f^{r}(\phi, r)| \leq A\left(|\phi|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})} + |r|^{\gamma-1} + 1\right), \tag{4.21}$$

para todo $(\phi, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$ y alguna constante $A > 0$.

El potencial transmembranal ϕ y la variable de estado r supondremos pertenecen a los espacios funcionales

$$\mathcal{S} = \{\phi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) : \phi = \bar{\phi} \in \partial\mathcal{B}_{\phi}\} \ \text{ y } \ \mathcal{V} = \mathcal{L}^{\gamma}(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M),$$

respectivamente, donde $\gamma \geq 2$ es el exponente en (4.19)–(4.21).

También supondremos que

$$\text{Para } \phi \in \mathcal{S} \text{ fijo } \exists \mathcal{M}, \mathcal{N} \geq 0 : \begin{cases} |F(\phi, r)| \leq \mathcal{M}(1 + |\phi|^{2^*} + |r|^p) & \text{si } \gamma = 2,\ p < 2 \\ |F(\phi, r)| \leq \mathcal{N}(1 + |\phi|^{2^*} - |r|^{\gamma}) & \text{si } \gamma > 2 \end{cases} \tag{4.22}$$

$$\text{Para } r \in \mathcal{V} \text{ fijo } \exists m \geq 0 : F(\phi, r) \geq m(-1 - |r|^{\gamma}). \tag{4.23}$$

El menor valor propio de C_r y de D será denotado por C_r^{min} y μ, respectivamente. Denotaremos por δ_{ϕ} y δ_r las constantes elípticas:

$$\delta_{\phi} := \sup_{(\phi,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M} \frac{\partial f^{\phi}}{\partial \phi}(\phi, r) \ \text{ y } \ \delta_r := \sup_{\substack{(\phi,r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M, \\ \xi \in \mathbb{R}^M, |\xi| \leq 1}} \xi \cdot (\nabla_r f^r(\phi, r))\xi. \tag{4.24}$$

Por último, denotaremos por $C_{\mathcal{B}} = C_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}, \partial\mathcal{B}_\phi)$ a la constante óptima en la desigualdad de Poincaré:

$$\int_{\mathcal{B}} \eta(x)^2\, dx \leq C_{\mathcal{B}} \int_{\mathcal{B}} |\nabla\eta(x)|^2\ dx \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})\ t.q.\ \eta = 0\ en\ \partial\mathcal{B}_\phi. \tag{4.25}$$

Y denotaremos por C_t a la constante óptima dada por el teorema de traza:

$$\|\eta(x)\|^2_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B})} \leq C\,\|\eta(x)\|^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} \leq C_t\,\|\nabla\eta(x)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \tag{4.26}$$

Teorema 4.1. *Sean $F, G_n, \mathcal{S}, \mathcal{V}, C_r^{min}, \mu, \delta_r, \delta_\phi$ y $C_{\mathcal{B}}$ las expresiones definidas anteriormente. Supongamos, además que $\phi_n \in \mathcal{S}, r_n \in \mathcal{V}$ y*

$$\frac{1}{\tau} > \max\left\{\frac{\delta_\phi}{C_\phi} - \frac{\mu}{C_\phi C_{\mathcal{B}}}, \frac{\delta_r}{C_r^{min}}\right\}\ \ y\ que\ \bar{q} \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q). \tag{4.27}$$

Entonces, la forma débil de las ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas (4.4), (4.5), (4.6) y (4.7), dadas por

$$\int_{\mathcal{B}} \left\{C_\phi \frac{\phi - \phi_n}{\tau}\eta + D\nabla\phi\cdot\nabla\eta - f^\phi(\phi, r)\eta\right\} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}\cdot\eta\, dS = 0$$

$$\forall \eta \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})\ t.q.\ \eta = 0\ en\ \partial\mathcal{B}_\phi$$

$$\int_{\mathcal{B}} \xi\cdot\left\{C_r\frac{r - r_n}{\tau} - f^r(\phi, r)\right\} dx = 0\ \ \forall \xi \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M),$$

admite una única solución (ϕ_{n+1}, r_{n+1}) determinada por el principio variacional

$$G_n[\phi_{n+1}, r_{n+1}] = \min_{\phi\in\mathcal{S}} \max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\phi, r].$$

Observación 4.2. El teorema sigue siendo cierto, con la misma demostración, si $F(\phi, r)$ es solo C^1 pero tal que:

$$F(\phi, r) - F(\phi_0, r) \geq -f^\phi(\phi_0, r)(\phi - \phi_0) + \frac{\delta_\phi}{2}(\phi - \phi_0)^2\ \ \forall \phi, \phi_0 \in \mathbb{R},\ r \in \mathbb{R}^M \text{ y}$$

$$F(\phi, r) - F(\phi, r_0) \leq f^r(\phi, r_0)(r - r_0) + \frac{\delta_r}{2}|r - r_0|^2\ \ \forall \phi \in \mathbb{R},\ r, r_0 \in \mathbb{R}^M$$

para algunas constantes $\delta_\phi, \delta_r \in \mathbb{R}$.

Observación 4.3. La razón por la que se expresa (4.27) como una condición en $\dfrac{1}{\tau}$ (y no directamente en τ) es que la expresión de la derecha puede ser negativa. Si $F(\phi, r)$ es convexa en ϕ, la condición es $\delta_r\tau < C_r^{min}$. Si $F(\phi, r)$ es cóncava en r, la condición es $\dfrac{1}{\tau} > \dfrac{\delta_\phi}{C_\phi} - \dfrac{\mu}{C_\phi C_{\mathcal{B}}}$. Si es a la vez convexa en ϕ y cóncava en r, la conclusión es válida para todo $\tau > 0$.

4.2.1. Continuidad, diferenciabilidad y convexidad-concavidad del funcional de energía

Antes de comenzar con la demostración del *Teorema 4.1* enunciaremos un par de proposiciones relevantes en el desarrollo de ésta. En la siguiente proposición seguimos esencialmente la demostración del teorema de convergencia dominada generalizado.

Proposición 4.4. *Sean Ω un conjunto medible en $\mathbb{R}^N$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones medibles $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ que converge en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ a una función $f : \Omega \to \mathbb{R}$ para algún $p > 1$. Sea $\psi \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ y supongamos que $W \in C^1(\Omega \times \mathbb{R})$ es tal que $0 \leq W(x,t) \leq \psi(x) + C|t|^p$ para alguna constante $C > 0$. Si $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ está uniformemente acotada en $\mathcal{L}^p$ entonces $\displaystyle\int_\Omega W(x, f_n(x))\,dx \to \int_\Omega W(x, f(x))\,dx$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. *Paso 1:* Demostraremos primero que la proposición es cierta si agregamos la hipótesis $f_j \to f$ c.t.p. Sea $W_j(x) := W(x, f_j(x))$ por definición, $0 \leq W_j(x) \leq \psi(x) + C|f_j(x)|^p$, luego $0 \leq \psi(x) + C|f_j(x)|^p - W_j(x) \ \ \forall j \in \mathbb{N}$. Por el lema de Fatou,

$$\int_\Omega \liminf_{j\to\infty} \left(\psi(x) + C|f_j(x)|^p - W_j(x)\right)\,dx \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\int_\Omega \left(\psi(x) + C|f_j(x)|^p - W_j(x)\right)\,dx\right).$$

Como $f_j \to f$ c.t.p., por continuidad de W, $W_j(x) \to W(x, f(x))$ y $|f_j(x)|^p \to |f(x)|^p$, luego

$$\int_\Omega \left(\psi(x) + C|f(x)|^p - W(x, f(x))\right)\,dx \leq \liminf_{j\to\infty} \left(\int_\Omega \left(\psi(x) + C|f_j(x)|^p\right)\,dx - \int_\Omega W_j(x)\,dx\right).$$

Además $f_j \to f$ en $\mathcal{L}^p(\Omega)$ y $\left|\|f_j\|_{\mathcal{L}^p} - \|f\|_{\mathcal{L}^p}\right| \leq \|f_j - f\|_{\mathcal{L}^p} \to 0$, entonces

$$\int_\Omega \left(\psi(x) + C|f(x)|^p\right)\,dx - \int_\Omega W(x, f(x))\,dx \leq \int_\Omega \left(\psi(x) + C|f(x)|^p\right)\,dx + \liminf_{j\to\infty}\left(-\int_\Omega W_j(x)\,dx\right).$$

Así,

$$-\int_\Omega W(x,f(x))\,dx \leq \liminf_{j\to\infty}\left(-\int_\Omega W_j(x)\,dx\right) = -\limsup_{j\to\infty}\left(\int_\Omega W_j(x)\,dx\right).$$

$$\int_\Omega W(x,f(x))\,dx \geq \limsup_{j\to\infty}\int_\Omega W_j(x)\,dx \geq \liminf_{j\to\infty}\int_\Omega W_j(x)\,dx. \tag{4.28}$$

Nuevamente por el lema de Fatou y (4.28), como $W_j(x) \geq 0$ (por definición)

$$\int_\Omega W(x,f(x))\,dx \geq \int_\Omega \liminf_{j\to\infty} W_j(x)\,dx = \int_\Omega W(x,f(x))\,dx$$

(ya habíamos demostrado anteriormente que $W_j(x) \to W(x,f(x))$). Por lo tanto,

$$\int_\Omega W(x,f(x))\,dx = \lim_{j\to\infty}\int_\Omega W(x,f_j(x))\,dx \text{ si } f_j \to f \text{ c.t.p.}$$

Paso 2: Consideremos ahora el caso en que $\{f_n\}$ no necesariamente converge a f c.t.p.. Basta con observar que toda subsucesión $\{f_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$ de $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión $\{f_{n_{k_j}}\}_{j\in\mathbb{N}}$ que converge a f c.t.p. (ver [4]), de modo que (por el *paso 1*)

$$\int_\Omega W(x,f_{n_{k_j}}(x))\,dx \to \int_\Omega W(x,f(x))\,dx.$$

Por lo tanto, toda subsucesión de $\left\{\int_\Omega W(x,f_n(x))\,dx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ tiene una subsucesión que converge a $\int_\Omega W(x,f(x))\,dx$. Esto implica que la sucesión completa $\left\{\int_\Omega W(x,f_n(x))\,dx\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge a $\int_\Omega W(x,f(x))\,dx$. □

Proposición 4.5. *Para todo $s, A, B > 0$ se tiene:*

$$As^2 - Bs \geq \frac{As^2}{2} - \frac{B^2}{2A}$$

Demostración.

$$\frac{As^2}{2} - Bs = \frac{A}{2}\left(\left(s-\frac{B}{A}\right)^2 - \frac{B^2}{A^2}\right) \geq -\frac{As^2}{2}\frac{B^2}{A^2}$$

Lo que concluye la demostración. □

A continuación sigue la demostración del *Teorema 4.1*:

Demostración. (*Teorema* 4.1) Por el teorema de inclusión de Sobolev (TIS), el teorema de traza (ver [8]) y asumiendo las condiciones de crecimiento de $F(\phi, r)$, G_n está bien definida como una función de $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$ a $\mathbb{R}$ (esto es, la integral en (4.18) es finita). En efecto, demostrar que G_n está bien definida de $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$ a $\mathbb{R}$, equivale a probar que cada parte de la integral que define G_n es finita. Recordemos la definición de G_n dada en (4.18),

$$\begin{aligned}
G_n[\phi, r] &= \int_{\mathcal{B}} g_n(\phi, \nabla\phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \phi\, dS \\
&= \int_{\mathcal{B}} \tau \Psi\left(\frac{\phi - \phi_n}{\tau}, \frac{r - r_n}{\tau}\right) + E(\phi, \nabla\phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \phi\, dS \\
&= \int_{\mathcal{B}} \tau \left\{\frac{1}{2} C_\phi \left(\frac{\phi - \phi_n}{\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) \cdot C_r \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right\} \\
&+ \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot D\nabla\phi\, dx + \int_{\mathcal{B}} F(\phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \phi\bar{q}\, dS \\
&= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \tau \frac{1}{2} C_\phi \left(\frac{\phi - \phi_n}{\tau}\right)^2 dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\tau \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) \cdot C_r \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) dx}_{I_2} \\
&+ \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot D\nabla\phi\, dx}_{I_3} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} F(\phi, r)\, dx}_{I_4} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \phi\, dS}_{I_5}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Para I_1, como $\phi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por el *TIS*, $\phi \in \mathcal{L}^{2^*}(\mathcal{B})$. Y como $\mathcal{L}^{2^*}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, entonces $\phi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$. Por la desigualdad de Minkowski $\left(\dfrac{\phi - \phi_n}{\tau}\right) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, luego I_1 es finita. Por otra parte, como $r \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$ y $\gamma \geq 2$, se tiene que $r \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, luego por la desigualdad de Minkowski, $\left(\dfrac{r - r_n}{\tau}\right) \in \mathcal{L}^2$. Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy,

$$\begin{aligned}
\left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) \cdot C_r \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| &\leq \left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| \left|C_r \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| \\
&\leq \left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| \|C_r\|_2 \left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| \\
&= \|C_r\|_2 \left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right|^2.
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Por lo tanto I_2 es finita. Así también el que $\phi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ por definición implica que $\nabla\phi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, y

$$|\nabla\phi \cdot D\nabla\phi| \leq |\nabla\phi| \cdot |D\nabla\phi| \leq |\nabla\phi| \cdot \|D\|_2 |\nabla\phi| = \|D\|_2 |\nabla\phi|^2, \tag{4.31}$$

con lo que I_3 es finita. Ahora, mirando (4.19), como $r \in \mathcal{L}^{\gamma}(\mathcal{B})$ (por definición), para ver que I_4 es finita basta con demostrar que $\phi \in \mathcal{L}^{2^*}(\mathcal{B})$, lo cual es cierto por el *TIS*. Por último, para $\partial\mathcal{B}_q$, por el teorema de trazas, $\mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B})$, entonces como $\phi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, $\phi \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B})$, y por hipótesis $\bar{q} \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)$, luego por la desigualdad de Hölder

$$\int_{\partial\mathcal{B}_q} |\phi\bar{q}| \; dS \leq \underbrace{\left(\int_{\partial\mathcal{B}_q} |\phi|^2 \; dS\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty} \underbrace{\left(\int_{\partial\mathcal{B}_q} |\bar{q}|^2 \; dS\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty},$$

es decir, I_5 es finita. Esto demuestra que G_n está bien definida como función de $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$ a $\mathbb{R}$.

Con el fin de aplicar la *Proposición 3.1*, es necesario probar que G_n satisface las hipótesis señaladas. Primero verificamos que se satisfacen (a) y (c), nuevamente por el *TIS* combinado con la *Proposición 4.4* y el teorema de traza, se sigue que G_n es continua en ϕ y en r con respecto a la convergencia en norma en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ y $\mathcal{L}^{\gamma}(\mathcal{B})$, respectivamente:

$$\forall r \in \mathcal{V}, \phi \mapsto G_n[\phi, r] \text{ es continua con respecto a la norma de } \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \text{ y} \tag{4.32}$$

$$\forall \phi \in \mathcal{S}, r \mapsto G_n[\phi, r] \text{ es continua con respecto a la norma de } \mathcal{L}^{\gamma}(\mathcal{B}). \tag{4.33}$$

Nuevamente probar esto equivale a probar la continuidad para cada una de las integrales que define a G_n. Ahora, como $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ y $\mathcal{L}^{\gamma}(B)$ son espacios métricos, basta con probar la continuidad por sucesiones. Primero probaremos (4.32): sea $\{\phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\phi_j \longrightarrow \phi$ en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$. Por *TIS*

$$\|\phi_j - \phi\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{B})} \leq \|\phi_j - \phi\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} \quad \forall q \leq 2^*,$$

y como $2 \leq 2^*$, $\phi_j \longrightarrow \phi$ en $\mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, luego

$$\frac{\phi_j - \phi_n}{\tau} \longrightarrow \frac{\phi - \phi_n}{\tau} \text{ en } \mathcal{L}^2(\mathcal{B}).$$

Pero,

$$\left| \left\| \frac{\phi_j - \phi_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} - \left\| \frac{\phi - \phi_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \right| \leq \left\| \frac{\phi_j - \phi_n}{\tau} - \frac{\phi - \phi_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \longrightarrow 0,$$

por lo tanto

$$\left\| \frac{\phi_j - \phi_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \longrightarrow \left\| \frac{\phi - \phi_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})},$$

luego I_1 es continua con respecto a ϕ en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$. Por (4.31) y la *Proposición 4.4*

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla\phi_j \cdot D\nabla\phi_j \, dx \longrightarrow \int_{\mathcal{B}} \nabla\phi \cdot D\nabla\phi \, dx,$$

entonces I_3 es continua en ϕ con respecto a la norma en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$. Lo mismo ocurre con I_4: por (4.19) y la *Proposición 4.4*

$$\int_{\mathcal{B}} F(\phi_j, r) \, dx \longrightarrow \int_{\mathcal{B}} F(\phi, r) \, dx,$$

es decir, I_4 también es continua en ϕ. Por último, para I_5, por el teorema de traza,

$$\|\phi_j - \phi\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B})} \leq \|\phi_j - \phi\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})},$$

por lo tanto $\phi_j \longrightarrow \phi$ en $\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)$. Como $\bar{q} \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)$ se tiene, por la desigualdad de Hölder,

$$\int_{\partial\mathcal{B}_q} |\bar{q} \cdot (\phi_j - \phi)| \; dS \leq \underbrace{\left(\int_{\partial\mathcal{B}_q} |\phi_j - \phi| \; dS\right)^{\frac{1}{2}}}_{\longrightarrow 0} \underbrace{\left(\int_{\partial\mathcal{B}_q} |\bar{q}| \; dS\right)^{\frac{1}{2}}}_{<\infty}$$

luego,

$$\int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \phi_j \, dS \longrightarrow \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \phi \, dS,$$

es decir, I_5 es continua en ϕ. Esto demuestra que $G_n[\phi_j, r] \longrightarrow G_n[\phi, r]$, esto es, $G_n[\phi, r]$ es continua en ϕ con respecto a la norma en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$.

Ahora, para probar (4.33), sea $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $r_j \longrightarrow r$ en $\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, con $\gamma \geq 2$. Por (4.30) y la *Proposición 4.4*

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{r_j - r_n}{\tau}\right) \cdot C_r \left(\frac{r_j - r_n}{\tau}\right) dx \longrightarrow \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) \cdot C_r \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) dx,$$

por lo tanto I_2 es continua en r con respecto a la norma en $\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$. Lo mismo ocurre con I_4: por (4.19) y la *Proposición 4.4*

$$\int_{\mathcal{B}} F(\phi, r_j) \, dx \longrightarrow \int_{\mathcal{B}} F(\phi, r) \, dx,$$

es decir, I_4 también es continua en r. Se demuestra así que $G_n[\phi, r_j] \longrightarrow G_n[\phi, r]$, esto es $G_n[\phi, r]$ es continua en r con respecto a la norma en $\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, si $\gamma \geq 2$.

En segundo lugar verificamos que se satisfacen (b) y (d), notamos que para cada $\phi \in \mathcal{S}$ fijo, por (4.29) tenemos que

$$G_n[\phi, r] \leq C(\phi, \phi_n) + \int_{\mathcal{B}} F(\phi, r)\, dx - \frac{1}{2}\tau C_r^{min} \left\| \frac{r - r_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2}^2,$$

donde $C(\phi, \phi_n) = I_1 + I_3 + I_5$ (aquí es fundamental recordar que C_r es simétrica, definida positiva y C_r^{min} es el menor de sus valores propios). Además,

$$\left\| \frac{r - r_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2 \geq \frac{\|r\|_{\mathcal{L}^2}^2}{2\tau^2} - \frac{\|r_n\|_{\mathcal{L}^2}^2}{\tau^2},$$

luego

$$G_n[\phi, r] \leq C(\phi, \phi_n) + \int_{\mathcal{B}} F(\phi, r)\, dx - \frac{1}{2}\tau C_r^{min} \left(\frac{\|r\|_{\mathcal{L}^2}^2}{2\tau^2} - \frac{\|r_n\|_{\mathcal{L}^2}^2}{\tau^2} \right).$$

Entonces, si $\gamma = 2$, gracias a (4.22) y recordando que $\|r\|_{\mathcal{V}} = \|r\|_{\mathcal{L}^\gamma}$ tenemos que para cada ϕ fijo:

$$\begin{aligned} G_n[\phi, r] &\leq C(\phi, \phi_n) + \mathcal{M} \int_{\mathcal{B}} \left(|\phi|^{2^*} + |r|^p + 1 \right) dx - \frac{1}{2}\tau C_r^{min} \left(\frac{\|r\|_{\mathcal{L}^2}^2}{2\tau^2} - \frac{\|r_n\|_{\mathcal{L}^2}^2}{\tau^2} \right) \\ &\leq C(\phi, \phi_n, r_n) - \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} |r|^2 - \mathcal{M} |r|^p \right) dx. \end{aligned}$$

Analizando la última desigualdad tenemos que si $|r| \geq 1$ entonces

$$\frac{C_r^{min}}{4\tau} |r|^2 - \mathcal{M} |r|^p = r^2 \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \frac{\mathcal{M}}{|r|^{2-p}} \right) \geq r^2 \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M} \right) \geq r^2 \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M} \right) - \mathcal{M},$$

ahora si $0 \leq |r| \leq 1$ tenemos que $|r|^p \leq 1$, luego,

$$\frac{C_r^{min}}{4\tau} |r|^2 - \mathcal{M} |r|^p \geq \frac{C_r^{min}}{4\tau} |r|^2 - \mathcal{M} \geq \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M} \right) |r|^2 - \mathcal{M},$$

en ambos casos

$$\frac{C_r^{min}}{4\tau} |r|^2 - \mathcal{M} |r|^p \geq \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M} \right) |r|^2 - \mathcal{M},$$

entonces

$$G_n[\phi, r] \leq C(\phi, \phi_n, r_n) - \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M} \right) \int_{\mathcal{B}} |r|^2\, dx.$$

Por lo tanto concluimos que $\lim\limits_{\substack{r\in\mathcal{V}\\ \|r\|_{\mathcal{V}}\to\infty}} G_n[\phi,r]=-\infty$. Ahora si $\gamma>2$, también obtenemos este límite pues por (4.22)

$$\begin{aligned}G_n[\phi,r] &\leq C(\phi,\phi_n)+\mathcal{N}\int_{\mathcal{B}}\left(|\phi|^{2^*}-|r|^{\gamma}+1\right)\,dx-\frac{1}{2}\tau C_r^{min}\left\|\frac{r-r_n}{\tau}\right\|_{\mathcal{L}^2}^2\\ &\leq C(\phi,\phi_n)+\mathcal{N}\int_{\mathcal{B}}\left(|\phi|^{2^*}-|r|^{\gamma}+1\right)\,dx.\end{aligned}$$

Análogamente, para cada r fijo, por (4.23) y (4.29)

$$G_n[\phi,r]\geq\int_{\mathcal{B}}\frac{1}{2}\nabla\phi\cdot D\nabla\phi\,dx+m\int_{\mathcal{B}}(-1-|r|^{\gamma})\,dx+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}\cdot\phi\,dS+C(r,r_n),$$

donde $C(r,r_n):=-I_2$. Recordando que D es simétrica, definida positiva y utilizando su menor valor propio μ,

$$G_n[\phi,r]\geq\frac{\mu}{2}\|\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2-\|\bar{q}\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)}\|\phi\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)}+C(r,r_n).$$

Por (2.3), (4.25) y (4.26) tenemos que $\|\phi\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)}\leq C\|\phi\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})}\leq C_t\|\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}$, luego,

$$G_n[\phi,r]\geq\frac{\mu}{2}\|\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2-C_t\|\bar{q}\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)}\|\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}+C(r,r_n),$$

y en vista de la *Proposición 4.5* tenemos,

$$G_n[\phi,r]\geq C(\|\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2-1)+C(r,r_n).$$

Por lo tanto, como $\|\nabla\phi\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2\to\infty$ cuando $\|\phi\|_{\mathcal{S}}\to\infty$, se tiene que $\lim\limits_{\substack{\phi\in\mathcal{S}\\ \|\phi\|_{\mathcal{S}}\to\infty}} G[\phi,r]=\infty\ \forall r\in\mathcal{V}$.

Lo tercero es verificar que $G_n[\phi,r]$ es estrictamente convexo-cóncavo. En efecto, primero fijando $r\in\mathcal{V}$, sean $\phi_1,\phi_2\in\mathcal{S}$ y $\lambda\in(0,1)$, definamos $\phi_\lambda=(1-\lambda)\phi_1+\lambda\phi_2$. Debemos demostrar (2.8), i.e.:

$$(1-\lambda)G_n[\phi_1,r]+\lambda G_n[\phi_2,r]-G_n[\phi_\lambda,r]\geq 0.$$

Notemos que si $H:\mathbb{R}^K\to\mathbb{R},\ K\in\mathbb{N}$ es una forma cuadrática entonces

$$(1-\lambda)H(\sigma_1)+\lambda H(\sigma_2)-H(\sigma_\lambda)=\lambda(1-\lambda)H(\sigma_2-\sigma_1). \tag{4.34}$$

En efecto, podemos reescribir el lado izquierdo como

$$\lambda\left(H(\sigma_1+(\sigma_2-\sigma_1))-H(\sigma_1)\right)-\left(H(\sigma_1+\lambda(\sigma_2-\sigma_1))-H(\sigma_1)\right). \tag{4.35}$$

Como H es una forma cuadrática, es de la forma $H(\sigma) = \sigma \cdot A\sigma$ para alguna matriz $A \in \mathbb{R}^{K\times K}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} H(\sigma+\rho) - H(\sigma) &= (\sigma+\rho)\cdot A(\sigma+\rho) - \sigma \cdot A\sigma \\ &= 2\sigma \cdot A\rho + \rho \cdot A\rho \\ &= 2\sigma \cdot A\rho + H(\rho),\ \forall \sigma, \rho \in \mathbb{R}^K. \end{aligned}$$

Reemplazando ρ por $\sigma_2 - \sigma_1$ y por $\lambda(\sigma_2-\sigma_1)$ obtenemos que (4.35) está dado por

$$\begin{aligned} &\lambda\left(2\sigma_1 \cdot A(\sigma_2-\sigma_1) + H(\sigma_2-\sigma_1)\right) \\ &\qquad - \left(2\sigma_1 \cdot A(\lambda(\sigma_2-\sigma_1)) + H(\lambda(\sigma_2-\sigma_1))\right) = \lambda(1-\lambda)H(\sigma_2-\sigma_1). \end{aligned}$$

Aplicamos lo hecho anteriormente a las funciones cuadráticas que definen G_n. Primero analicemos $\tau\psi\left(\frac{\phi-\phi_n}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right)$. Definiendo $H(\sigma) = \tau\frac{1}{2}C_\phi\sigma^2,\ \sigma \in \mathbb{R}$ obtenemos

$$(1-\lambda)H\left(\frac{\phi_1-\phi_n}{\tau}\right) + \lambda H\left(\frac{\phi_2-\phi_n}{\tau}\right) - H\left(\frac{\phi_\lambda-\phi_n}{\tau}\right) = \frac{1}{2}\frac{C_\phi}{\tau}\lambda(1-\lambda)(\phi_2-\phi_1)^2. \tag{4.36}$$

Ahora para $E(\phi, \nabla\phi, r)$, tomemos $H(\sigma) := \frac{1}{2}\sigma \cdot D\sigma,\ \sigma \in \mathbb{R}^N$ entonces,

$$(1-\lambda)H(\nabla\phi_1) + \lambda H(\nabla\phi_2) - H(\nabla\phi_\lambda) = \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\nabla(\phi_2-\phi_1)\cdot D\nabla(\phi_2-\phi_1).$$

En el caso de $F(\phi, r)$, el teorema de Taylor nos dice que,

$$F(\phi) = F(\phi_\lambda) + F'(\phi_\lambda)(\phi-\phi_\lambda) + F''(\xi)\frac{(\phi-\phi_\lambda)^2}{2} \text{ con } \xi \text{ entre } \phi \text{ y } \phi_\lambda$$

luego

$$\begin{aligned} F(\phi_1) &= F(\phi_\lambda) + F'(\phi_\lambda)(\phi_1-\phi_\lambda) + F''(\xi_1)\frac{(\phi_1-\phi_\lambda)^2}{2} \text{ con } \xi_1 \text{ entre } \phi_1 \text{ y } \phi_\lambda, \text{ y} \\ F(\phi_2) &= F(\phi_\lambda) + F'(\phi_\lambda)(\phi_2-\phi_\lambda) + F''(\xi_2)\frac{(\phi_2-\phi_\lambda)^2}{2} \text{ con } \xi_2 \text{ entre } \phi_2 \text{ y } \phi_\lambda. \end{aligned}$$

Entonces,

$$(1-\lambda)F(\phi_1) + \lambda F(\phi_2) - F(\phi_\lambda) = (1-\lambda)F''(\xi_1)\frac{(\phi_1-\phi_\lambda)^2}{2} + \lambda F''(\xi_2)\frac{(\phi_2-\phi_\lambda)^2}{2}$$

pero $\phi_1 - \phi_\lambda = -\lambda(\phi_2 - \phi_1)$ y $\phi_2 - \phi_\lambda = (1-\lambda)(\phi_2 - \phi_1)$ luego,

$$\begin{aligned} &= (1-\lambda)F''(\xi_1)\lambda^2\frac{(\phi_2-\phi_1)^2}{2} + \lambda F''(\xi_2)(1-\lambda)^2\frac{(\phi_2-\phi_1)^2}{2} \\ &= \frac{(\phi_2-\phi_1)^2}{2}(1-\lambda)\lambda\{\lambda F''(\xi_1) + (1-\lambda)F''(\xi_2)\} \\ &\geq \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}\right)\frac{(\phi_2-\phi_1)^2}{2}(1-\lambda)\lambda. \end{aligned} \tag{4.37}$$

Así

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)E(\phi_1) + \lambda E(\phi_2) - E(\phi_\lambda) \\ &\quad\geq \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\nabla(\phi_2-\phi_1)\cdot D\nabla(\phi_2-\phi_1) + \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}\right)\frac{(\phi_2-\phi_1)^2}{2}\lambda(1-\lambda). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} &(1-\lambda)g_n(\phi_1) + \lambda g_n(\phi_2) - g_n(\phi_\lambda) \geq \frac{1}{2}\frac{C_\phi}{\tau}\lambda(1-\lambda)(\phi_2-\phi_1)^2 \\ &\qquad + \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\nabla(\phi_2-\phi_1)\cdot D\nabla(\phi_2-\phi_1) + \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}\right)\frac{(\phi_2-\phi_1)^2}{2}\lambda(1-\lambda) \\ &\geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left\{\frac{C_\phi}{\tau}(\phi_2-\phi_1)^2 + \nabla(\phi_2-\phi_1)\cdot D\nabla(\phi_2-\phi_1) + \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}\right)(\phi_2-\phi_1)^2\right\}. \end{aligned}$$

Notar por último, que la integral sobre $\partial\mathcal{B}_q$ es lineal en ϕ, luego ya es convexo. Así tenemos:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\lambda(1-\lambda)}((1-\lambda)G_n[\phi_1,r] + \lambda G_n[\phi_2,r] - G_n[(1-\lambda)\phi_1 + \lambda\phi_2, r]) \\ &\geq \int_{\mathcal{B}}\left\{\frac{C_\phi}{\tau}(\phi_2-\phi_1)^2 + \nabla(\phi_2-\phi_1)\cdot D\nabla(\phi_2-\phi_1) + \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}\right)(\phi_2-\phi_1)^2\right\}dx. \end{aligned}$$

Por definición (4.24), $\delta_\phi := \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial f^\phi}{\partial\phi}(\phi,r) = \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} -\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}(\phi,r) = -\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}(\phi,r)$, luego

$$\begin{aligned} &= \int_{\mathcal{B}}\left\{\frac{C_\phi}{\tau}(\phi_2-\phi_1)^2 + \nabla(\phi_2-\phi_1)\cdot D\nabla(\phi_2-\phi_1) - \delta_\phi(\phi_2-\phi_1)^2\right\}dx \\ &= \left(\frac{C_\phi}{\tau} - \delta_\phi\right)\int_{\mathcal{B}}(\phi_2-\phi_1)^2\,dx + \int_{\mathcal{B}}\nabla(\phi_2-\phi_1)\cdot D\nabla(\phi_2-\phi_1)\,dx. \end{aligned}$$

Como $\nabla\phi \cdot D\nabla\phi \geq \mu \|\nabla\phi\|^2$, con μ el menor valor propio de D,

$$\geq \left(\frac{C_\phi}{\tau} - \delta_\phi\right) \int_{\mathcal{B}} (\phi_2 - \phi_1)^2 \, dx + \mu \int_{\mathcal{B}} \|\nabla(\phi_2 - \phi_1)\|^2 \, dx.$$

Por último por la desigualdad de Poincaré (4.25), se tiene que

$$\geq \left(\frac{C_\phi}{\tau} + \frac{\mu}{C_{\mathcal{B}}} - \delta_\phi\right) \int_{\mathcal{B}} (\phi_2 - \phi_1)^2 \, dx$$

lo que prueba, en virtud de (4.27), que $G_n[\cdot, r]$ es estrictamente convexa para todo $r \in \mathcal{V}$. Pues:

$$\frac{C_\phi}{\tau} + \frac{\mu}{C_{\mathcal{B}}} - \delta_\phi > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\tau} > \frac{\delta_\phi}{C_\phi} - \frac{\mu}{C_{\mathcal{B}} C_\phi}.$$

Del mismo modo, $G_n[\phi, r]$ es estrictamente cóncavo en r. En efecto, fijando $\phi \in \mathcal{S}$, sean $r_1, r_2 \in \mathcal{V}$, y $\lambda \in [0,1]$, definamos $r_\lambda = (1-\lambda)r_1 + \lambda r_2$. Debemos demostrar (2.9), i.e.:

$$(1-\lambda)G_n[\phi, r_1] + \lambda G_n[\phi, r_2] - G_n[\phi, r_\lambda] \leq 0.$$

Análogamente, distinguimos las funciones cuadráticas que definen G_n y aplicamos lo demostrado anteriormente para una función de este tipo. Primero analicemos $\tau\Psi\left(\frac{\phi - \phi_n}{\tau}, \frac{r - r_n}{\tau}\right)$. Definiendo $H(\sigma) := \tau\frac{1}{2}\sigma \cdot C_r\sigma,\ \sigma \in \mathbb{R}^M$, obtenemos

$$(1-\lambda)H\left(\frac{r_1 - r_n}{\tau}\right) + \lambda H\left(\frac{r_2 - r_n}{\tau}\right) - H\left(\frac{r_\lambda - r_n}{\tau}\right) = \frac{1}{2\tau}\lambda(1-\lambda)(r_2 - r_1) \cdot C_r(r_2 - r_1).$$

Ahora para $E(\phi, \nabla\phi, r)$, sólo nos interesa $F(\phi, r)$. Repitiendo lo hecho antes para ϕ tenemos

$$(1-\lambda)F(r_1) + \lambda F(r_2) - F(r_\lambda) = \frac{(r_2 - r_1)^2}{2}\lambda(1-\lambda)\{\lambda F''(\xi_1) + (1-\lambda)F''(\xi_2)\}$$

con ξ_i entre r_i y r_λ, para $i = 1, 2$

$$\leq \left(\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right) \frac{(r_2 - r_1)^2}{2}\lambda(1-\lambda).$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)g_n(r_1) + \lambda g_n(r_2) - g_n(r_\lambda) \\
&\quad \leq -\frac{1}{2\tau}\lambda(1-\lambda)(r_2 - r_1) \cdot C_r(r_2 - r_1) + \left(\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right) \frac{(r_2 - r_1)^2}{2}\lambda(1-\lambda) \\
&\qquad \leq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left\{-\frac{1}{\tau}(r_2 - r_1) \cdot C_r(r_2 - r_1) + \left(\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right)(r_2 - r_1)^2\right\}.
\end{aligned}$$

Notar, por último, que la integral sobre $\partial\mathcal{B}_q$ no depende de r. Así tenemos:

$$\frac{2}{\lambda(1-\lambda)}((1-\lambda)G_n[\phi,r_1]+\lambda G_n[\phi,r_2]-G_n[\phi,r_\lambda])$$
$$\leq \int_{\mathcal{B}}\left\{-\frac{1}{\tau}(r_2-r_1)\cdot C_r(r_2-r_1)+\left(\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\right)(r_2-r_1)^2\right\}dx;$$

por definición (4.24), $\delta_r := \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \nabla_r f^r(\phi,r) = \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\phi,r)$

$$= \int_{\mathcal{B}}\left\{-\frac{1}{\tau}(r_2-r_1)\cdot C_r(r_2-r_1)+\delta_r(r_2-r_1)^2\right\}dx.$$

Como $r\cdot C_r r \geq C_r^{min}\,|r|^2$, con C_r^{min} el menor valor propio de C_r,

$$\leq \left(-\frac{C_r^{min}}{\tau}+\delta_r\right)\int_{\mathcal{B}}|r_2-r_1|^2\,dx.$$

lo que prueba en virtud de (4.27) que $G_n[\phi,\cdot]$ es estrictamente cóncava para todo $\phi\in\mathcal{S}$, pues:

$$-\frac{C_r^{min}}{\tau}+\delta_r<0 \Longleftrightarrow \frac{\delta_r}{C_r^{min}}<\frac{1}{\tau}.$$

Por último nos queda probar que G_n es Gâteaux diferenciable siempre que $F(\phi,r)$ satisfaga las condiciones de crecimiento (4.19)–(4.21), y que sus derivadas parciales están dadas por

$$\langle D_\phi G_n[\phi,r],\eta\rangle = \int_{\mathcal{B}}\left\{C_\phi\frac{\phi-\phi_n}{\tau}\eta + D\nabla\phi\cdot\nabla\eta - f^\phi(\phi,r)\eta\right\}dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}\cdot\eta\,dS,$$
$$\forall\eta\in\mathcal{H}^1(\mathcal{B})\ t.q.\ \eta=0\ en\ \partial\mathcal{B}_\phi.$$

$$\langle D_r G_n[\phi,r],\xi\rangle = \int_{\mathcal{B}}\xi\cdot\left\{-C_r\frac{r-r_n}{\tau}+f^r(\phi,r)\right\}dx, \qquad \forall\xi\in\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B},\mathbb{R}^M).$$

En efecto, para $\lambda\in(0,1)$ y $\eta\in\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ $t.q.$ $\eta=0$ en $\partial\mathcal{B}_\phi$, por definición (2.10) la derivada parcial de G_n con respecto a ϕ corresponde a:

$$\langle D_\phi G_n[\phi,r],\eta\rangle = \lim_{\lambda\to0^+}\frac{G_n[\phi+\lambda\eta,r]-G_n[\phi,r]}{\lambda}$$
$$= \lim_{\lambda\to0^+}\left\{\int_{\mathcal{B}}\frac{g_n(\phi+\lambda\eta,\nabla(\phi+\lambda\eta),r)-g_n(\phi,\nabla\phi,r)}{\lambda}dx+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\frac{\bar{q}\cdot(\phi+\lambda\eta)-\bar{q}\cdot\phi}{\lambda}dS\right\}$$
$$= \lim_{\lambda\to0^+}\int_{\mathcal{B}}\frac{g_n(\phi+\lambda\eta,\nabla(\phi+\lambda\eta),r)-g_n(\phi,\nabla\phi,r)}{\lambda}dx+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}\cdot\eta\,dS.$$

Nos gustaría intercambiar el límite con la integral, para esto notamos que:

$$\frac{g_n(\phi+\lambda\eta,\nabla(\phi+\lambda\eta),r)-g_n(\phi,\nabla\phi,r)}{\lambda}=\fint_0^\lambda \frac{\partial g_n}{\partial s}(\phi+s\eta,\nabla(\phi+s\eta),r)\,ds$$

luego,

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{g_n(\phi+\lambda\eta,\nabla(\phi+\lambda\eta),r)-g_n(\phi,\nabla\phi,r)}{\lambda}\right|\\
&\leq \fint_0^\lambda \left|\frac{\partial g_n}{\partial s}(\phi+s\eta,\nabla(\phi+s\eta),r)\right|\,ds\\
&= \fint_0^\lambda \left|C_\phi\left(\frac{\phi+s\eta-\phi_n}{\tau}\right)\eta+\nabla\eta\cdot D\nabla(\phi+s\eta)+\frac{\partial F}{\partial\phi}(\phi+s\eta,r)\eta\right|\,ds\\
&\leq \fint_0^\lambda \left|C_\phi\left(\frac{\phi+s\eta-\phi_n}{\tau}\right)\eta\right|\,ds+\fint_0^\lambda \left|\nabla\eta\cdot D\nabla(\phi+s\eta)\right|\,ds+\fint_0^\lambda \left|\frac{\partial F}{\partial\phi}(\phi+s\eta,r)\eta\right|\,ds.
\end{aligned}$$

Acotando cada parte, tenemos primero:

$$\begin{aligned}
\left|C_\phi\left(\frac{\phi+s\eta-\phi_n}{\tau}\right)\eta\right| &\leq \frac{C_\phi}{\tau}\left(|\phi|+|\eta|+|\phi_n|\right)|\eta|\\
&= \frac{C_\phi}{\tau}\left(|\phi|\,|\eta|+|\eta|^2+|\phi_n|\,|\eta|\right).
\end{aligned}$$

Como $\phi,\phi_n,\eta\in\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por el *TIS*, $\phi,\phi_n,\eta\in\mathcal{L}^q(\mathcal{B})\ \ \forall q\leq 2^*$, con esto $|\phi|^2,|\phi_n|^2,|\eta|^2\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Por la desigualdad de Hölder, $|\phi|\,|\eta|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$ pues,

$$\int|\phi|\,|\eta|\leq\left(\int|\phi|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int|\eta|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|\phi\|_{\mathcal{L}^2}\|\eta\|_{\mathcal{L}^2}<\infty.$$

Análogamente, $|\phi_n|\,|\eta|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$, lo que muestra $\left|C_\phi\left(\frac{\phi+s\eta-\phi_n}{\tau}\right)\eta\right|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$.

Del mismo modo,

$$\begin{aligned}
|\nabla\eta\cdot D\nabla(\phi+s\eta)| &\leq |\nabla\eta|\,\|D\|_2\,|\nabla(\phi+s\eta)|\\
&\leq |\nabla\eta|\,\|D\|_2\,(|\nabla\phi|+|\nabla\eta|)\\
&\leq 2\,\|D\|_2\,(|\nabla\phi|^2+|\nabla\eta|^2).
\end{aligned}$$

Como $\phi, \eta \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por definición $\nabla\phi, \nabla\eta \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, con lo que $\|D\|_2 (|\nabla\phi|^2 + |\nabla\eta|^2) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Por último,

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi + s\eta, r)\eta\right| &= \left|-f^\phi(\phi + s\eta, r)\eta\right| \text{ y por (4.20)} \\ &\leq A\left(|\phi + s\eta|^{2^*-1} + |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}} + 1\right)|\eta| \\ &\leq A\left((|\phi| + |\eta|)^{2^*-1} + |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}} + |\eta|\right) \\ &\leq A\left((|\phi| + |\eta|)^{2^*} + |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}|\eta| + |\eta|\right) \\ &\leq 2^{2^*-1}A\left(|\phi|^{2^*} + |\eta|^{2^*} + |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}|\eta| + |\eta|\right).\end{aligned}$$

Nuevamente como $\phi, \eta \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por el *TIS*, $\phi, \eta \in \mathcal{L}^q \quad \forall q \leq 2^*$, con esto $|\phi|^{2^*}, |\eta|^{2^*}, |\eta| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Además, por la desigualdad de Hölder,

$$\int |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}|\eta| \leq \left(\int \left(|r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}\right)^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int |\eta|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{2N}} = \|r\|_{\mathcal{L}^\gamma}^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}} \|\eta\|_{\mathcal{L}^{2^*}} < \infty,$$

así $|r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}|\eta| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$ y por lo tanto $\left|\frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi + s\eta, r)\eta\right| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$.

En resumen, $\displaystyle\fint_0^\lambda \left|\frac{\partial g_n}{\partial s}(\phi + s\eta, \nabla(\phi + s\eta), r)\right| ds$ tiene una cota integrable (uniforme con respecto a λ). Por el *TCD* podemos intercambiar el límite con la integral, con lo que G_n es Gâteaux diferenciable con respecto a ϕ y la derivada parcial está dada por:

$$\begin{aligned}\langle D_\phi G_n[\phi, r], \eta\rangle &= \lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\mathcal{B}} \frac{g_n(\phi + \lambda\eta, \nabla(\phi + \lambda\eta), r) - g_n(\phi, \nabla\phi, r)}{\lambda} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \eta \, dS \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial g_n}{\partial \lambda}[\phi + \lambda\eta, r]\bigg|_{\lambda=0} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \eta \, dS \\ &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ C_\phi \frac{\phi + \lambda\eta - \phi_n}{\tau}\eta + \nabla\eta \cdot D\nabla(\phi + \lambda\eta) + \frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi + \lambda\eta, r)\eta \right\}\bigg|_{\lambda=0} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \eta \, dS \\ &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ C_\phi \frac{\phi - \phi_n}{\tau}\eta + \nabla\eta \cdot D\nabla\phi + \frac{\partial F}{\partial \phi}(\phi, r)\eta \right\} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \eta \, dS \\ &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ C_\phi \frac{\phi - \phi_n}{\tau}\eta + \nabla\eta \cdot D\nabla\phi - f^\phi(\phi, r)\eta \right\} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \eta \, dS.\end{aligned}$$

Análogamente probaremos que G_n es Gâteaux diferenciable con respecto a r. En efecto, para $\lambda \in (0, 1)$ y $\xi \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, por definición (2.11) la derivada parcial de G_n con respecto a r corresponde a:

$$\begin{aligned}\langle D_r G_n[\phi, r], \xi\rangle &= \lim_{\lambda\to 0^+} \frac{G_n[\phi, r+\lambda\xi] - G_n[\phi, r]}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\mathcal{B}} \frac{g_n(\phi, \nabla\phi, r+\lambda\xi) - g_n(\phi, \nabla\phi, r)}{\lambda}\, dx.\end{aligned}$$

Al igual que antes nos gustaría intercambiar el límite con la integral. Para esto notamos que:

$$\frac{g_n(\phi, \nabla\phi, r+\lambda\xi) - g_n(\phi, \nabla\phi, r)}{\lambda} = \fint_0^\lambda \frac{\partial g_n}{\partial s}(\phi, \nabla\phi, r+s\xi)\, ds$$

luego,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{g_n(\phi, \nabla\phi, r+\lambda\xi) - g_n(\phi, \nabla\phi, r)}{\lambda}\right| \le \fint_0^\lambda \left|\frac{\partial g_n}{\partial s}(\phi, \nabla\phi, r+s\xi)\right| ds \\ &= \fint_0^\lambda \left|\xi\cdot -C_r\frac{r+s\xi-r_n}{\tau} + \xi\cdot\frac{\partial F}{\partial r}(\phi, r+s\xi)\right| ds \\ &\le \fint_0^\lambda \left|\xi\cdot C_r\frac{r+s\xi-r_n}{\tau}\right| ds + \fint_0^\lambda \left|\xi\cdot\frac{\partial F}{\partial r}(\phi, r+s\xi)\right| ds.\end{aligned}$$

Acotando cada parte, tenemos primero:

$$\begin{aligned}\left|\xi\cdot C_r\frac{r+s\xi-r_n}{\tau}\right| &\le \|C_r\|_2 \left|\frac{r+s\xi-r_n}{\tau}\right| |\xi| \\ &\le \frac{\|C_r\|_2}{\tau}\left(|r|+|\xi|+|r_n|\right)|\xi| \\ &= \frac{\|C_r\|_2}{\tau}\left(|r|\,|\xi| + |\xi|^2 + |r_n|\,|\xi|\right).\end{aligned}$$

Como $r, r_n, \xi \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, $\gamma \ge 2$, $|r|^2, |r_n|^2, |\xi|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Por la desigualdad de Hölder, $|r|\,|\xi| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$ pues,

$$\int |r|\,|\xi| \le \left(\int |r|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int |\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|r\|_{\mathcal{L}^2}\,\|\xi\|_{\mathcal{L}^2} < \infty.$$

Análogamente, $|r_n|\,|\xi| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$, lo que muestra que $\left|\xi\cdot C_r\frac{r+s\xi-r_n}{\tau}\right| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$.

Por último, por (4.21),

$$\begin{aligned}\left|\xi\cdot\frac{\partial F}{\partial r}(\phi,r+s\xi)\right| &\le A\left(|\phi|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}+|r+s\xi|^{\gamma-1}+1\right)|\xi|\\ &\le A\left(|\phi|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}+(|r|+|\xi|)^{\gamma-1}+1\right)|\xi|\\ &\le A\left(|\phi|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}|\xi|+(|r|+|\xi|)^{\gamma}+|\xi|\right)\\ &\le 2^{\gamma-1}A\left(|\phi|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}|\xi|+|r|^{\gamma}+|\xi|^{\gamma}+|\xi|\right).\end{aligned}$$

Nuevamente como $r,\xi\in\mathcal{L}^{\gamma}(\mathcal{B})$, $\gamma\ge 2$, $|r|^{\gamma},|\xi|^{\gamma},|\xi|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Además como $\phi\in\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por el *TIS*, $\phi\in\mathcal{L}^q(\mathcal{B})$ $\forall q\le 2^*$ y por la desigualdad de Hölder,

$$\int|\phi|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}|\xi|\le\left(\int(|\phi|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\int|\xi|^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\|\phi\|_{\mathcal{L}^{2^*}}^{2^*(\frac{\gamma-1}{\gamma})}\|\xi\|_{\mathcal{L}^{\gamma}}<\infty,$$

luego $|\phi|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}|\xi|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$ y por lo tanto $\left|\xi\cdot\dfrac{\partial F}{\partial r}(\phi,r+s\xi)\right|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$.

En resumen, $\displaystyle\fint_0^{\lambda}\left|\frac{\partial g_n}{\partial s}(\phi,\nabla\phi,r+s\xi)\right|ds$ tiene una cota integrable. Por el *TCD* podemos intercambiar el límite con la integral, luego G_n es Gâteaux diferenciable con respecto a r y la derivada parcial está dada por:

$$\begin{aligned}\langle D_rG_n[\phi,r],\xi\rangle &= \lim_{\lambda\to0^+}\int_{\mathcal{B}}\frac{g_n(\phi,\nabla\phi,r+\lambda\xi)-g_n(\phi,\nabla\phi,r)}{\lambda}\,dx\\ &=\int_{\mathcal{B}}\frac{\partial g_n}{\partial\lambda}(\phi,\nabla\phi,r+\lambda\xi)\bigg|_{\lambda=0}dx\\ &=\int_{\mathcal{B}}\left\{\xi\cdot -C_r\frac{r+\lambda\xi-r_n}{\tau}+\xi\cdot\frac{\partial F}{\partial r}(\phi,r+\lambda\xi)\right\}\bigg|_{\lambda=0}dx\\ &=\int_{\mathcal{B}}\xi\cdot\left\{-C_r\frac{r-r_n}{\tau}+\frac{\partial F}{\partial r}(\phi,r)\right\}dx\\ &=\int_{\mathcal{B}}\xi\cdot\left\{-C_r\frac{r-r_n}{\tau}+f^r(\phi,r)\right\}dx.\end{aligned}$$

El teorema entonces se sigue de la *Proposición* 3.1, notando que $\phi+\eta$, $\phi-\eta$ y $r+\xi$, $r-\xi$ pertenecen a $\mathcal{S}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente, para todo $\phi\in\mathcal{S}$, $\eta\in\mathcal{H}_0^1(\mathcal{B})$ y $r,\xi\in\mathcal{L}^{\gamma}(\mathcal{B},\mathbb{R}^M)$. □

4.3. El problema efectivo de minimización.

En general, y para el propósito de aplicación de elementos finitos, se considerará resolver el problema de maximización localmente. Resulta que maximizar el potencial incremental con respecto a r es equivalente a la maximización de la densidad del potencial incremental. Por lo tanto, el problema de electrofisiología lo reescribimos como

$$\min_{\phi\in\mathcal{S}} F_n[\phi], \tag{4.38}$$

donde

$$F_n[\phi] := \int_{\mathcal{B}} \max_{r\in\mathbb{R}^M} g_n(\phi(x), \nabla\phi(x), r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}(x)\cdot\phi(x)\, dS,$$

lo cual, en vista de (4.9) y (4.17) queda escrito como

$$F_n[\phi] := \int_{\mathcal{B}} \left\{\frac{1}{2}\nabla\phi(x)\cdot D\nabla\phi(x) + f_n(\phi(x), x)\right\} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}(x)\cdot\phi(x)\, dS, \tag{4.39}$$

con

$$f_n(\phi, x) := \max_{r\in\mathbb{R}^M}\left\{\tau\psi\left(\frac{\phi-\phi_n(x)}{\tau}, \frac{r-r_n(x)}{\tau}\right) + F(\phi, r)\right\}, \phi\in\mathbb{R}, x\in\mathcal{B}. \tag{4.40}$$

Lema 4.6. *Si para todo $\phi\in\mathcal{S}$ existe $r_\phi\in\mathcal{V}$ tal que*

$$\tau\psi\left(\frac{\phi(x)-\phi_n(x)}{\tau}, \frac{r_\phi(x)-r_n(x)}{\tau}\right) + F(\phi(x), r_\phi(x)) = f_n(\phi(x), x) \ \ \forall x\in\mathcal{B} \tag{4.41}$$

(es decir, si para todo $x\in\mathcal{B}$ es posible elegir un $r_\phi(x)$, en el cual el máximo en (4.40) se alcanza, de tal manera que $r_\phi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^M$, como una función de x, pertenezca a $\mathcal{V}$), entonces

$$F_n[\phi] = \max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\phi, r] \ \ \forall\phi\in\mathcal{S}.$$

Demostración. Sea $\phi\in\mathcal{S}$ y supongamos que (4.41) se cumple. Entonces, por un lado,

$$\begin{aligned}\max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\phi, r] &\geq G_n[\phi, r_\phi] \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot D\nabla\phi + \tau\psi\left(\frac{\phi-\phi_n}{\tau}, \frac{r_\phi-r_n}{\tau}\right) + F(\phi, r_\phi)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}\cdot\phi\, dS \\ &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot D\nabla\phi + f_n(\phi, x)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}\cdot\phi\, dS \\ &= F_n[\phi].\end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $r \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned} G_n[\phi, r] &= \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot D\nabla\phi + \tau\psi\left(\frac{\phi-\phi_n}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}\cdot\phi\, dS \\ &\leq \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\nabla\phi \cdot D\nabla\phi + f_n(\phi, x)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}\cdot\phi\, dS \\ &= F_n[\phi]. \end{aligned}$$

luego, $\max\limits_{r\in\mathcal{V}} G_n[\phi, r] \leq F_n[\phi]$. En consecuencia, $F_n[\phi] = \max\limits_{r\in\mathcal{V}} G_n[\phi, r] \quad \forall\phi \in \mathcal{S}$ lo que completa la demostración. $\square$

Comúnmente, los métodos de descenso de gradiente son ocupados en la solución numérica de (4.38). En particular, una iteración de Newton-Raphson garantiza la convergencia del método si la función en cuestión es estrictamente convexa [3]. Sin embargo, si la función $F(\phi, r)$ que define la densidad del potencial electroquímico no es convexa, la convexidad del potencial incremental efectivo puede no ser garantizada para valores grandes del paso de tiempo τ, limitando por lo tanto la solidez y la eficiencia en el procedimiento de minimización. Esta importante limitación en la solución numérica del problema de electrofisiología es reparada en la siguiente proposición, donde se prueba que cuando $\tau \to 0$ el potencial incremental llega a ser estrictamente convexo, lo que implica que el algoritmo de minimización converge a una única solución para τ suficientemente pequeño.

Proposición 4.7. *Una condición suficiente para que F_n sea estrictamente convexa es que*

$$\frac{1}{\tau} > \frac{\delta_\phi}{C_\phi} - \frac{\mu}{C_\phi C_{\mathcal{B}}},$$

δ_ϕ, μ y $C_{\mathcal{B}}$ definidos como en el Teorema *4.1.*

Demostración. Para todo $\phi_1, \phi_2 \in \mathbb{R}$, sea $\phi_\lambda := (1-\lambda)\phi_1 + \lambda\phi_2$,

$$\begin{aligned} (1-\lambda)f_n(\phi_1) + \lambda f_n(\phi_2) \geq \max_{r\in\mathbb{R}^M} \Bigg\{ &(1-\lambda)\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_1-\phi_n}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi_1, r)\right) \\ &+ \lambda\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_2-\phi_n}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi_2, r)\right)\Bigg\}. \end{aligned}$$

Mientras que para todo $r \in \mathbb{R}^M$ por lo ya hecho en (4.36), se tiene,

$$\begin{aligned} (1-\lambda)\tau\psi\left(\frac{\phi_1-\phi_n}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + \lambda\tau\psi\left(\frac{\phi_2-\phi_n}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) - \tau\psi\left(\frac{\phi_\lambda-\phi_n}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) \\ \geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\frac{C_\phi}{\tau}(\phi_2-\phi_1)^2 \end{aligned}$$

y por lo hecho en (6.28)

$$(1-\lambda)F(\phi_1,r)+\lambda F(\phi_2,r)-F(\phi_\lambda,r)\geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}(\phi_2-\phi_1)^2.$$

Por lo tanto $\forall r\in\mathbb{R}^M$,

$$(1\text{–}\lambda)\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_1-\phi_n}{\tau},\frac{r-r_n}{\tau}\right)+F(\phi_1,r)\right)+\lambda\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_2-\phi_n}{\tau},\frac{r-r_n}{\tau}\right)+F(\phi_2,r)\right)$$
$$\geq\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_\lambda-\phi_n}{\tau},\frac{r-r_n}{\tau}\right)+F(\phi_\lambda,r)\right)+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\frac{C_\phi}{\tau}+\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\frac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}\right)(\phi_2-\phi_1)^2,$$

por definición (4.24), $\delta_\phi:=\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\dfrac{\partial f^\phi}{\partial\phi}(\phi,r)=\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}-\dfrac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}(\phi,r)=-\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M}\dfrac{\partial^2 F}{\partial\phi^2}(\phi,r)$, luego

$$=\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_\lambda-\phi_n}{\tau},\frac{r-r_n}{\tau}\right)+F(\phi_\lambda,r)\right)+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\frac{C_\phi}{\tau}-\delta_\phi\right)(\phi_2-\phi_1)^2$$

y

$$(1-\lambda)f_n(\phi_1)+\lambda f_n(\phi_2)\geq f_n(\phi_\lambda)+\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\frac{C_\phi}{\tau}-\delta_\phi\right)(\phi_2-\phi_1)^2.$$

De todo lo anterior se tiene que,

$$(1-\lambda)F_n[\phi_1]+\lambda F_n[\phi_2]-F_n[\phi_\lambda]$$
$$\geq\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\mathcal{B}}\left\{\nabla(\phi_2-\phi_1)\cdot D\nabla(\phi_2-\phi_1)+\left(\frac{C_\phi}{\tau}-\delta_\phi\right)(\phi_2-\phi_1)^2\right\}dx$$

Como $\nabla\phi\cdot D\nabla\phi\geq\mu\,|\nabla\phi|^2$, con μ el menor valor propio de D

$$\geq\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left\{\int_{\mathcal{B}}\mu\,|\nabla(\phi_2-\phi_1)|^2\,dx+\left(\frac{C_\phi}{\tau}-\delta_\phi\right)\int_{\mathcal{B}}(\phi_2-\phi_1)^2\,dx\right\}$$

y por último por la desigualdad de Poincaré (4.25), se tiene

$$\geq\frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\frac{C_\phi}{\tau}+\frac{\mu}{C_{\mathcal{B}}}-\delta_\phi\right)\int_{\mathcal{B}}(\phi_2-\phi_1)^2\,dx.$$

□

4.4. Aplicación al modelo de FitzHugh-Nagumo.

Como un ejemplo de la formulación variacional propuesta, consideremos la ecuación de electrofisiología de FitzHugh-Nagumo, en la forma presentada en [16, 17]. El modelo de FitzHugh-Nagumo y diversas variantes han sido empleadas ampliamente de este en el modelamiento de la actividad cardíaca en corazones de mamíferos. Ellos consideran sólo una variable de recuperación (M=1); los términos fuente y el potencial de tasa toman la forma

$$\begin{aligned} f^\phi(\phi, r) &= c_1\phi(\phi-\alpha)(1-\phi) - c_2 r, \\ f^r(\phi, r) &= c_2(\phi - dr) \text{ y} \\ \Psi[\dot{\phi}, \dot{r}] &:= \int_{\mathcal{B}} \psi(\dot{\phi}, \dot{r})\, dx = \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{c_2}{2b}\dot{r}^2 \right\} dx \end{aligned}$$

respectivamente, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un umbral para la activación eléctrica; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ son constantes positivas que representan la tasa de excitación y el decaimiento de la excitación, respectivamente; y $b, d \in \mathbb{R}_+$ son constantes positivas que representan la tasa de recuperación y el decaimiento de la recuperación, respectivamente. El potencial electroquímico generalizado toma la forma

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[\phi, r] &:= \int_{\mathcal{B}} E(\phi, \nabla\phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}\cdot\phi\, dS \\ &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}\nabla\phi\cdot D\nabla\phi + c_1\left(\frac{1}{4}\phi^4 - \frac{(1+\alpha)}{3}\phi^3 + \frac{\alpha}{2}\phi^2\right) + c_2\left(\phi r - \frac{d}{2}r^2\right)\right\} dx \\ &+ \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}\cdot\phi\, dS \end{aligned}$$

donde $E : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la densidad del potencial electroquímico. Como mencionamos, la densidad del potencial electroquímico puede ser no convexa.

Proposición 4.8. *Supongamos que $N \leq 4$ y ya sea*

$$c_1 C_{\mathcal{B}}(\alpha^2 - \alpha + 1) < 3\mu \quad o \quad \tau < \frac{1}{\frac{c_1}{3}(1-\alpha+\alpha^2) - \frac{\mu}{C_{\mathcal{B}}}}, \tag{4.42}$$

donde μ es el menor valor propio del tensor de conductividad D y $C_{\mathcal{B}}$ es la constante de Poincaré en (4.25). Entonces, las ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas de FitzHugh-Nagumo

$$\frac{\phi_{n+1}-\phi_n}{\tau} - \operatorname{div}(D\nabla\phi_{n+1}) = f^\phi(\phi_{n+1}, r_{n+1}), \tag{4.43}$$

$$\frac{r_{n+1}-r_n}{\tau} = \frac{b}{c_2} f^r(\phi_{n+1}, r_{n+1}), \tag{4.44}$$

admiten una única solución débil (ϕ_{n+1}, r_{n+1}) *determinada por las relaciones*

$$F_n[\phi_{n+1}] = \min_{\substack{\phi\in\mathcal{H}^1(\mathcal{B})\\ \phi=\bar{\phi} \text{ en } \partial B_\phi}} F_n[\phi] \quad y \quad r_{n+1} = \frac{r_n + b\tau\phi_{n+1}}{1+db\tau},$$

donde $F_n[\phi]$*, dado por (4.39), es estrictamente convexo.*

Demostración. Esta proposición se sigue del *Teorema 4.1*, el *Lema 4.6* y la *Proposición 4.7*, una vez que comprobemos las hipótesis de estos. Notar que por las definiciones (4.43) y (4.44), en comparación con (4.6) y (4.7) se tiene $C_\phi = 1$ y $C_r = \frac{c_2}{b}$. Además para

$$F(\phi, r) = c_1\left(\frac{1}{4}\phi^4 - \frac{(1+\alpha)}{3}\phi^3 + \frac{\alpha}{2}\phi^2\right) + c_2\left(\phi r - \frac{d}{2}r^2\right)$$

verificamos las condiciones de las definiciones (4.10) y (4.11),

$$\frac{\partial F}{\partial \phi} = c_1(\phi^3 - (1+\alpha)\phi^2 + \alpha\phi) + c_2 r = c_1\phi(\phi-1)(\phi-\alpha) + c_2 r = -f^\phi(\phi, r) \text{ y}$$
$$\frac{\partial F}{\partial r} = c_2(\phi - dr) = f^r(\phi, r).$$

Ahora con el fin de utilizar el *Teorema 4.1* queremos probar que F satisface las hipótesis (4.19)–(4.23) con $\gamma = 2$. Para probar (4.19) es suficiente observar que:

$$\begin{aligned}|F(\phi, r)| &\le \left(\frac{c_1}{4}|\phi|^4 + \frac{c_1(1+\alpha)}{3}(|\phi|^4+1) + \frac{c_1\alpha}{2}(|\phi|^4+1)\right) + c_2\left(\frac{\phi^2+r^2}{2} - \frac{d}{2}r^2\right)\\ &\le \left(\frac{c_1}{4} + \frac{c_1(1+\alpha)}{3} + \frac{c_1\alpha}{4} + \frac{c_2}{2}\right)|\phi|^4 + \frac{c_2+d}{2}r^2 + c_1\left(\frac{1+\alpha}{3} + \frac{\alpha}{4}\right).\end{aligned}$$

Las condiciones (4.20)–(4.23) se prueban de forma análoga. Por lo tanto, (4.43) y (4.44) admiten una única solución débil (ϕ_{n+1}, r_{n+1}) determinada por:

$$G_n[\phi_{n+1}, r_{n+1}] = \min_{\phi\in\mathcal{S}} \max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\phi, r]. \tag{4.45}$$

Para verificar la hipótesis del *Lema 4.6*, notar que:

$$\begin{aligned} f_n(\phi, r) &:= \max_{r\in\mathbb{R}}\left\{\tau\psi\left(\frac{\phi-\phi_n}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi, r)\right\}\\ &= \max_{r\in\mathbb{R}}\left\{\tau\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\phi-\phi_n}{\tau}\right)^2 - \frac{c_2}{b}\left(\frac{r-r_n}{\tau}\right)^2\right) + F(\phi, r)\right\}\\ &= \max_{r\in\mathbb{R}}\left\{\frac{1}{2}\frac{(\phi-\phi_n)^2}{\tau} - \frac{c_2}{b}\frac{(r-r_n)^2}{\tau} + F(\phi, r)\right\}.\end{aligned}$$

Con esto,

$$
\begin{aligned}
& f_n(\phi(x),x) = \tau\psi\left(\frac{\phi(x)-\phi_n(x)}{\tau}, \frac{r_\phi(x)-r_n(x)}{\tau}\right) + F(\phi(x), r_\phi(x)), \quad \forall x \in \mathcal{B} \\
\iff & f_n(\phi(x),x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(\phi(x)-\phi_n(x))^2}{\tau} - \frac{c_2}{b}\frac{(r_\phi(x)-r_n(x))^2}{\tau}\right) + F(\phi(x), r_\phi(x)), \\
\iff & \frac{-c_2(r_\phi(x)-r_n(x))}{b\tau} + \frac{\partial F}{\partial r}(\phi(x), r_\phi(x)) = 0 \\
\iff & \frac{-c_2(r_\phi(x)-r_n(x))}{b\tau} + c_2(\phi(x) - dr_\phi(x)) = 0 \\
\iff & r_\phi(\phi) = \frac{r_n(x) + b\tau\phi(x)}{1+bd\tau}.
\end{aligned}
$$

Así la condición (4.41) se cumple automáticamente pues $r_n(x) + b\tau\phi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, ya que $r_n(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, $\phi(x) \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ y por la desigualdad de Minkowski se tiene que $r_\phi(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$. Entonces, por el *Lema 4.6*,

$$
F_n[\phi] = \max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\phi, r] \ \ \forall \phi \in \mathcal{S}. \tag{4.46}
$$

Por último verificamos las hipótesis de la *Proposición 4.7*. El valor de $\sup\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \dfrac{\partial f^\phi}{\partial \phi}$ se obtiene de,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f^\phi}{\partial \phi}(\phi, r) &= c_1(\phi-\alpha)(1-\phi) + c_1\phi(1-2\phi+\alpha) \\
&= c_1\left(2\phi - \alpha - 3\phi^2 + 2\alpha\phi\right).
\end{aligned}
$$

Esta expresión alcanza su supremo en:

$$
c_1(2-6\phi+2\alpha) = 0 \iff \phi = \frac{1}{3}(\alpha+1) \text{ con } c_1 \neq 0,
$$

luego,

$$
\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{\partial f^\phi}{\partial \phi} = \frac{c_1}{3}(\alpha^2-\alpha+1) > 0, \text{ pues, } \triangle = \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot 1\cdot 1} = -3 < 0.
$$

Por lo tanto,

$$
\delta_\phi = \frac{c_1}{3}(\alpha^2-\alpha+1) \text{ y se sigue que } \frac{\delta_\phi}{C_\phi} - \frac{\mu}{C_\phi C_\mathcal{B}} = \frac{c_1}{3}(\alpha^2-\alpha+1) - \frac{\mu}{C_\mathcal{B}}.
$$

Por (4.42),

$$\frac{\delta_\phi}{C_\phi} - \frac{\mu}{C_\phi C_{\mathcal{B}}} < \frac{1}{\tau},$$

entonces por la *Proposición 4.7*, $F_n[\phi]$ es estrictamente convexo. (4.47)

En conclusión de (4.45), (4.46) y (4.47) se tiene esta proposición. □

Capítulo 5

Formulación variacional para el modelo de bidominio

En este capítulo buscamos replicar de forma análoga lo ya hecho en el capítulo previo, pero esta vez considerando la formulación variacional para el modelo de bidominio. El decir bidominio hace referencia a que en general, los tejidos intra y extra celular del músculo cardíaco poseen diferentes conductividades en las direcciones longitudinal y transversal, con respecto a la fibra correspondiente; si estas conductividades son iguales, volvemos al modelo de monodominio ya descrito. Las ecuaciones de este modelo se tienen a partir del principio de conservación de corriente entre los dominios intra y extra celular, seguido de un proceso de homogeneización (ver por ejemplo [6, 5]).

Sea $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^N$ el dominio físico de interés donde N es cualquier entero positivo; sean $\phi^i : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ y $\phi^e : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ el potencial intra y extra celular, respectivamente. La diferencia entre ellos $\phi^m = \phi^i - \phi^e$ es conocida como el potencial transmembranal. Sea $r = (r_1, \dots r_M) : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^M$ una variable interna vectorial que controla la recuperación de la célula. Además, sean $I_i^s : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ y $I_e^s : \mathcal{B} \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ estímulos externos de corriente intra y extra celular por unidad de volumen, respectivamente. El modelo de bidominio del problema de electrofisiología cardíaca puede ser descrito en términos de un sistema acoplado de ecuaciones no lineales de reacción-difusión, ecuaciones elípticas y de evolución de la siguiente forma:

$$A_m(C_m \dot{\phi^m} + I_{ion}(\phi^m, r)) = \operatorname{div}(D_i \nabla \phi^i) + I_i^s, \tag{5.1}$$

$$A_m(C_m \dot{\phi^m} + I_{ion}(\phi^m, r)) = -\operatorname{div}(D_e \nabla \phi^e) - I_e^s, \tag{5.2}$$

$$C_r \dot{r} = f^r(\phi^m, r), \tag{5.3}$$

donde $\dot{\phi} = \frac{\partial \phi}{\partial t}$ denota la derivada con respecto al tiempo, $C_m \in \mathbb{R}^+$ es la capacitancia de la membrana celular, $A_m \in \mathbb{R}^+$ es la razón superficie a volumen de la membrana celular, $C_r \in \mathbb{R}^{M\times M}$ es un tensor simétrico y definido positivo, y $D_i : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times N}$ y $D_e : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^{N\times N}$ son los tensores de conductividad intra y entra celular, respectivamente, los que suponemos simétricos y definidos positivos. Notar que las ecuaciones de monodominio pueden ser recuperadas bajo la suposición de que el medio extracelular es altamente conductor, es decir $D_e \to \infty$ o que los tensores de conductividad intra y extra celular son proporcionales, es decir $D_i = kD_e$ para algún $k \in \mathbb{R}_+$, luego, como ya dijimos, el modelo de monodominio es una particularización del modelo de bidominio. Ahora, si reemplazamos $\phi^i = \phi^m + \phi^e$ en (5.1) obtenemos la siguiente ecuación

$$A_m(C_m\dot{\phi^m} + I_{ion}(\phi^m, r)) - \operatorname{div}(D_i\nabla\phi^m) - \operatorname{div}(D_i\nabla\phi^e) = I_i^s, \tag{5.4}$$

y si sustituimos (5.2) en (5.4) nos queda

$$-\operatorname{div}(D_i\nabla\phi^m) - \operatorname{div}((D_i + D_e)\nabla\phi^e) = I_i^s + I_e^s. \tag{5.5}$$

El sistema de ecuaciones antes descrito para el problema de electrofisiología cardíaca puede ser reescrito entonces como:

$$A_m(C_m\dot{\phi^m} + I_{ion}(\phi_m, r)) - \operatorname{div}(D_i\nabla\phi^m) - \operatorname{div}(D_i\nabla\phi^e) = I_i^s, \tag{5.6}$$
$$-\operatorname{div}(D_i\nabla\phi^m) - \operatorname{div}((D_i + D_e)\nabla\phi^e) = I_i^s + I_e^s, \tag{5.7}$$
$$C_r\dot{r} = f^r(\phi^m, r). \tag{5.8}$$

Además, las ecuaciones gobernantes anteriores se complementan con las siguientes condiciones de borde; comúnmente se adopta una condición de flujo cero para la corriente intracelular, produciendo la condición de Neumann,

$$-D_i\nabla(\phi^m + \phi^e)\cdot n = 0, \quad x \in \partial\mathcal{B}, \tag{5.9}$$

mientras que las condiciones de borde de Dirichlet y Neumann pueden ser aplicadas directamente a la frontera extracelular,

$$\phi^e = \bar{\phi^e}, \quad x \in \partial\mathcal{B}_\Phi, \tag{5.10}$$
$$-D_e\nabla\phi^e\cdot n = \bar{q^e}, \quad x \in \partial\mathcal{B}_q, \tag{5.11}$$

donde la frontera de potencial $\partial\mathcal{B}_\Phi$ y la frontera de flujo $\partial\mathcal{B}_q$ son tales que $\partial\mathcal{B} = \partial\mathcal{B}_\Phi \cup \partial\mathcal{B}_q$ y $\partial\mathcal{B}_\Phi \cap \partial\mathcal{B}_q = \emptyset$. Las condiciones iniciales estás dadas por,

$$\phi^m|_{t=0} = \phi_0^m(x), \tag{5.12}$$
$$\phi^e|_{t=0} = \phi_0^e(x), \tag{5.13}$$
$$r|_{t=0} = r_0(x). \tag{5.14}$$

La elección de la variable de recuperación r, la corriente iónica $I_{ion}(\phi^m, r)$ y la función $f^r = (f_1^r, \ldots, f_M^r)$ determinan la formulación particular electrofisiológica, y existe una gran variedad de formulaciones diferentes en la literatura. Para una revisión extensa de los modelos electrofisiológicos más populares, ver [5]. La existencia y unicidad del problema electrofisiológico de bidominio, al igual que el de monodomio, también fueron estudiadas por Colli Franzone y Savaré [6].

Consideremos ahora la integración temporal de las ecuaciones de electrofisiología para el modelo de bidominio (5.6)-(5.14), y el intervalo de tiempo genérico $[t_n, t_{n+1}],\ n \in \mathbb{Z}$ donde la información en $t = t_n$ la supondremos conocida. Usando una discretización temporal Backward-Euler en diferencias finitas, obtenemos las siguientes ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas de bidominio:

$$A_m \left(C_m \frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau} + I_{ion}(\phi^m_{n+1}, r_{n+1}) \right) - \operatorname{div}(D_i \nabla \phi^m_{n+1}) - \operatorname{div}(D_i \nabla \phi^e_{n+1}) = I^s_i(x, t_{n+1}), \quad (5.15)$$

$$- \operatorname{div}(D_i \nabla \phi^m_{n+1}) - \operatorname{div}((D_i + D_e) \nabla \phi^e_{n+1}) = I^s_i(x, t_{n+1}) + I^s_e(x, t_{n+1}), \quad (5.16)$$

$$C_r \frac{r_{n+1} - r_n}{\tau} = f^r(\phi^m_{n+1}, r_{n+1}). \quad (5.17)$$

donde $\tau = t_{n+1} - t_n$. Tal como dijimos en el *Capítulo 4* para el problema de monodominio, este método de discretización temporal ha sido ampliamente usado gracias a su estabilidad al resolver un problema no lineal en cada paso de tiempo.

5.1. Potenciales generalizados y reformulación de flujo de gradiente

Al igual que para el problema de monodominio, en esta sección buscamos reformular el problema electrofisiológico de bidominio en un sistema de flujo de gradiente. Sea $\Phi := \begin{pmatrix} \phi^m \\ \phi^e \end{pmatrix}$ el vector potencial, $\nabla\Phi := \begin{pmatrix} \nabla\phi^m \\ \nabla\phi^e \end{pmatrix}$ el gradiente del vector potencial y $D := \begin{pmatrix} D_i & D_i \\ D_i & D_i + D_e \end{pmatrix} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^{2N \times 2N}$ el tensor aumentado de conductividad. Además denotaremos por μ_i y μ_e al menor valor propio de los tensores de conductividad D_i y D_e, respectivamente. Bajo estas definiciones podemos reformular el sistemas de ecuaciones (5.6)-(5.8) como sigue:

$$\begin{pmatrix} A_m C_m \dot{\phi^m} \\ 0 \end{pmatrix} - \operatorname{div} \begin{pmatrix} D_i & D_i \\ D_i & D_i + D_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla\phi^m \\ \nabla\phi^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I^s_i - A_m I_{ion}(\phi^m, r) \\ I^s_i + I^s_e \end{pmatrix}$$

$$C_r \dot{r} = f^r(\phi^m, r),$$

equivalentemente,

$$\begin{pmatrix} A_m C_m & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\Phi} - \operatorname{div} D\nabla\Phi = \begin{pmatrix} I_i^s - A_m I_{ion}(\phi^m, r) \\ I_i^s + I_e^s \end{pmatrix} \tag{5.18}$$

$$C_r \dot{r} = f^r(\phi^m, r). \tag{5.19}$$

Denotaremos $\mathcal{E}$ como el potencial electroquímico generalizado y Ψ como el potencial de tasa. Definimos la densidad del potencial electroquímico $E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ como,

$$E(\Phi, \nabla\Phi, r) := \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi + F(\phi^m, r), \tag{5.20}$$

donde $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función tal que

$$\frac{\partial F}{\partial \phi^m} = A_m I_{ion}(\phi^m, r) \tag{5.21}$$

$$\frac{\partial F}{\partial r_i} = f_i^r(\phi, r), \quad i = 1, \ldots, M. \tag{5.22}$$

y el potencial electroquímico como

$$\mathcal{E}[\phi, r] := \int_{\mathcal{B}} E(\Phi, \nabla\Phi, r)\, dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s \phi^e\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi^e\, dS. \tag{5.23}$$

También definimos la densidad del potencial de tasa como

$$\psi(\dot{\phi^m}, \dot{r}) := \frac{1}{2} A_m C_m \dot{\phi^m}^2 - \frac{1}{2}\dot{r} \cdot C_r \dot{r},$$

y el potencial de tasa como

$$\Psi[\dot{\phi^m}, \dot{r}] := \int_{\mathcal{B}} \psi(\dot{\phi^m}, \dot{r})\, dx.$$

Se sigue que las ecuaciones (5.18) y (5.19) pueden ser recuperadas a partir de los potenciales recién definidos, lo que otorga al modelo electrofisiológico de bidominio una estructura de flujo de gradiente. En efecto,

$$\begin{aligned} 0 \in \partial\Psi + D\mathcal{E} &\iff \langle D\Psi + D\mathcal{E}, (\eta, \xi) \rangle = 0 \ \ \forall (\eta, \xi) \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^M) \\ &\iff \left\langle D_u \Psi[\dot{\phi^m}, \dot{r}] + D_\Phi \mathcal{E}[\Phi, r], \eta \right\rangle = 0 \text{ y } \left\langle D_v \Psi[\dot{\phi^m}, \dot{r}] + D_r \mathcal{E}[\Phi, r], \xi \right\rangle = 0, \end{aligned} \tag{5.24}$$

donde $\eta := \begin{pmatrix} \eta^m \\ \eta^e \end{pmatrix}$, $v := \dot{r}$ y $u := \begin{pmatrix} u^m \\ u^e \end{pmatrix} = \dot{\Phi}$ con $u^m := \dot{\phi}^m$ y $u^e := \dot{\phi}^e$.

Probaremos que podemos recuperar las ecuaciones asumiendo que tanto $\mathcal{E}$ como Ψ poseen condiciones necesarias para aplicar el *TCD*, condiciones que se señalarán más adelante. Para $\lambda \in (0,1)$, primero tenemos que:

$$\langle D_\Phi \mathcal{E}[\Phi, r], \eta\rangle = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mathcal{E}[\Phi + \lambda\eta, r] - \mathcal{E}[\Phi, r]}{\lambda}$$
$$= \lim_{\lambda \to 0} \left\{ \int_{\mathcal{B}} \frac{E[\Phi + \lambda\eta, \nabla(\Phi + \lambda\eta), r] - E[\Phi, \nabla\Phi, r]}{\lambda} \, dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s(\eta^m + \eta^e) + I_e^s \eta^e \, dx \right.$$
$$\left. + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS \right\}.$$

Como $\eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^2)$, la integral sobre $\partial\mathcal{B}_q$ es nula, luego nos queda

$$= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left\{ E[\Phi + \lambda\eta, \nabla(\Phi + \lambda\eta), r] \right\} \Big|_{\lambda=0} dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s(\eta^m + \eta^e) + I_e^s \eta^e \, dx$$
$$= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \nabla\eta \cdot D\nabla(\Phi + \lambda\eta) + \frac{\partial F}{\partial\phi^m}(\phi^m + \lambda\eta^m, r)\eta^m \right\} \Big|_{\lambda=0} dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s(\eta^m + \eta^e) + I_e^s \eta^e \, dx$$
$$= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \nabla\eta \cdot D\nabla\Phi + \frac{\partial F}{\partial\phi^m}(\phi^m, r)\eta^m \right\} dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s(\eta^m + \eta^e) + I_e^s \eta^e \, dx.$$

Reemplazando (5.21), obtenemos

$$= \int_{\mathcal{B}} \nabla\eta \cdot D\nabla\Phi \, dx + \int_{\mathcal{B}} A_m I_{ion}(\phi^m, r)\eta^m \, dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s(\eta^m + \eta^e) + I_e^s \eta^e \, dx,$$

y reagrupando e integrando por partes (suponiendo que $\Phi \in C^2(\overline{\mathcal{B}})$ y que $\partial\mathcal{B}$ es lo suficientemente suave),

$$= -\int_{\mathcal{B}} \operatorname{div}(D\nabla\Phi)\eta \, dx + \int_{\mathcal{B}} (A_m I_{ion}(\phi^m, r) - I_i^s)\eta^m \, dx - \int_{\mathcal{B}} (I_i^s + I_e^s)\eta^e \, dx$$
$$= \left\langle -\operatorname{div}(D\nabla\Phi) + \begin{pmatrix} A_m I_{ion}(\phi^m, r) - I_i^s \\ -(I_i^s + I_e^s) \end{pmatrix}, \eta \right\rangle \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^2).$$

Por lo tanto,

$$\langle D_\Phi \mathcal{E}[\Phi, r], \eta\rangle = \left\langle -\operatorname{div}(D\nabla\Phi) + \begin{pmatrix} A_m I_{ion}(\phi^m, r) - I_i^s \\ -(I_i^s + I_e^s) \end{pmatrix}, \eta \right\rangle \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^2). \tag{5.25}$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\left\langle D_u\Psi[\dot{\phi^m},\dot{r}],\eta\right\rangle &= \langle D_{u^m}\Psi[u^m,v],\eta^m\rangle \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\frac{\Psi[u^m+\lambda\eta^m,v]-\Psi[u^m,v]}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0}\int_{\mathcal{B}}\frac{\psi[u^m+\lambda\eta^m,v]-\psi[u^m,v]}{\lambda}\,dx \\
&= \int_{\mathcal{B}}\frac{\partial}{\partial\lambda}\left\{\psi[u^m+\lambda\eta^m,v]\right\}\Big|_{\lambda=0}\,dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} A_mC_m(u+\lambda\eta^m)\eta|_{\lambda=0}\,dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} A_mC_mu^m\eta^m\,dx \\
&= \langle A_mC_mu^m,\eta^m\rangle \quad \forall\eta\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^2).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$
\left\langle D_u\Psi[\dot{\phi^m},\dot{r}],\eta\right\rangle = \left\langle A_mC_m\dot{\phi^m},\eta^m\right\rangle \quad \forall\eta\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^2). \tag{5.26}
$$

Uniendo (5.24), (5.25) y (5.26),

$$
\begin{aligned}
&\left\langle D_u\Psi[\dot{\phi^m},\dot{r}]+D_\Phi\mathcal{E}[\Phi,r],\eta\right\rangle = 0 \quad \forall\eta\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^2) \\
&\iff \left\langle A_mC_m\dot{\phi^m},\eta^m\right\rangle + \left\langle -\operatorname{div}(D\nabla\Phi)+\begin{pmatrix} A_mI_{ion}(\phi^m,r)-I_i^s \\ -(I_i^s+I_e^s)\end{pmatrix},\eta\right\rangle = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall\eta\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^2) \\
&\iff \left\langle A_mC_m\dot{\phi^m}-\operatorname{div}D_i(\nabla\phi^m+\nabla\phi^e)+A_mI_{ion}(\phi^m,r),\eta^m\right\rangle = 0 \;\; y \\
&\qquad \langle -\operatorname{div}D_i\nabla\phi^m-\operatorname{div}(D_i+D_e)\nabla\phi^e-(I_i^s+I_e^s),\eta^e\rangle = 0 \;\; \forall\eta^m,\eta^e\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}).
\end{aligned}
$$

de estas últimas dos igualdades se obtienen la ecuaciones (5.6) y (5.7).

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
\langle D_r\mathcal{E}[\Phi, r], \xi\rangle &= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\mathcal{E}[\Phi, r+\lambda\xi] - \mathcal{E}[\Phi, r]}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \int_{\mathcal{B}} \frac{E[\Phi, \nabla\Phi, r+\lambda\xi] - E[\Phi, \nabla\Phi, r]}{\lambda}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left\{E[\Phi, \nabla\Phi, r+\lambda\xi]\right\}\Big|_{\lambda=0}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial F}{\partial r_i}(\phi^m, r+\lambda\xi)\xi_i\Big|_{\lambda=0}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial F}{\partial r_i}(\phi^m, r)\xi_i\, dx,
\end{aligned}
$$

reemplazando (5.22), obtenemos

$$
\begin{aligned}
&= \int_{\mathcal{B}} \sum_{i=1}^{M} f_i^r(\phi^m, r)\xi_i\, dx \\
&= \langle f^r(\phi^m, r), \xi\rangle \quad \forall\xi \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto,

$$
\langle D_r\mathcal{E}[\Phi, r], \xi\rangle = \langle f^r(\phi^m, r), \xi\rangle \quad \forall\xi \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M). \tag{5.27}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
\left\langle D_v\Psi[\dot{\phi^m}, \dot{r}], \xi\right\rangle &= \langle D_v\Psi[u^m, v], \xi\rangle \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \frac{\Psi[u^m, v+\lambda\xi] - \Psi[u^m, v]}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda\to 0} \int_{\mathcal{B}} \frac{\psi[u^m, v+\lambda\xi] - \psi[u^m, v]}{\lambda}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left\{\psi[u^m, v+\lambda\xi]\right\}\Big|_{\lambda=0}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} -\xi\cdot C_r(v+\lambda\xi)|_{\lambda=0}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} -\xi\cdot C_r v\, dx \\
&= \langle -C_r v, \xi\rangle \quad \forall\eta \in C_0^\infty(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M).
\end{aligned}
$$

Entonces,

$$\left\langle D_v\Psi[\dot{\phi^m},\dot{r}],\xi\right\rangle = \langle -C_r\dot{r},\xi\rangle \quad \forall\xi\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^M). \tag{5.28}$$

Así de (5.24), (5.27) y (5.28),

$$\begin{aligned}&\left\langle D_v\Psi[\dot{\phi^m},\dot{r}] + D_r\mathcal{E}[\Phi,r],\xi\right\rangle = 0 \ \ \forall\xi\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^M)\\ \iff &\langle -C_r\dot{r} + f^r(\phi^m,r),\xi\rangle = 0 \ \ \forall\xi\in C_0^\infty(\mathcal{B},\mathbb{R}^M),\end{aligned}$$

de esta última igualdad se obtiene la ecuación (5.8).

Notamos de las definiciones de los potenciales que el comportamiento de éstos, en la variable transmembranal ϕ^m, es idéntico al de los potenciales definidos para las ecuaciones de monodominio, esto es, que mientras el potencial de tasa es un funcional estrictamente convexo en $\dot{\phi^m}$, el potencial electroquímico puede no ser convexo en ϕ^m.

El siguiente lema muestra que el tensor aumentado de conductividad D que obtuvimos en la reformulación anterior sigue siendo definido positivo.

Lema 5.1. *Para todo* $\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^{2N}$ *se tiene que*

$$\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\cdot D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} \geq \left(\mu_i + \frac{\mu_e}{2} - \sqrt{\mu_i^2 + \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^2}\right)(\|u\|^2 + \|v\|^2). \tag{5.29}$$

En el caso en que D_i, o bien D_e, sea un múltiplo de la identidad, la desigualdad anterior es optima.

Demostración. Basta con demostrar 5.29 para el caso en que $\|u\|^2+\|v\|^2=1$, es decir, podemos suponer que $\|u\| = cos(\theta/2)$ y $\|v\| = sen(\theta/2)$ para algún θ. Se tiene que

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\cdot D\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}u & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}D_i & D_i\\ D_i & D_i+D_e\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}\\ &= (u+v)\cdot D_i(u+v) + v\cdot D_e v\\ &\geq \mu_i\|u+v\|^2 + \mu_e\|v\|^2\\ &\geq \mu_i(\|u\|-\|v\|)^2 + \mu_e\|v\|^2\\ &= \mu_i(1-2\|u\|\,\|v\|) + \mu_e sen^2(\theta/2)\\ &= \mu_i + \frac{\mu_e}{2} - \left\langle \mu_i, \frac{\mu_e}{2}\right\rangle\cdot\langle sen\theta, cos\theta\rangle\\ &= \mu_i + \frac{\mu_e}{2} - \sqrt{\mu_i^2 + \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^2}.\end{aligned}$$

A pesar de que $\mu_i + \frac{\mu_e}{2} - \sqrt{\mu_i^2 + \left(\frac{\mu_e}{2}\right)^2}$ es una estimación razonable (y sencilla) del menor valor propio de D, dados nuestros propósitos nos será de mayor utilidad la siguiente estimación (por razones que resultaran más claras más adelante, las cuales tienen relación con el hecho de que el término de reacción en las ecuaciones depende sólo de ϕ^m y no de ϕ^e, y es la no convexidad de este término de reacción la que debe ser compensada con la convexidad del término de la energía cinética para el buen funcionamiento del método numérico).

Lema 5.2. *Para todo* $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N}$ *se tiene que*

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq \frac{\mu_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \|u\|^2 .$$

Demostración. De la demostración anterior teníamos

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \geq \mu_i \|u + v\|^2 + \mu_e \|v\|^2 . \tag{5.30}$$

Como

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2u \cdot v \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2 \|u\| \|v\| \cos\theta + \|v\|^2 \ \text{ para } \theta \text{ ángulo entre } u \text{ y } v \\ &\geq \|u\|^2 - 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2 . \end{aligned}$$

Continuando en (5.30)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot D \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} &\geq \mu_i (\|u\|^2 - 2 \|u\| \|v\| + \|v\|^2) + \mu_e \|v\|^2 \\ &= \|u\| \left(\mu_i - 2\mu_i \frac{\|v\|}{\|u\|} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} (\mu_i + \mu_e) \right) \\ &= (\mu_i + \mu_e) \|u\|^2 \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_e} - \frac{2\mu_i}{\mu_i + \mu_e} \frac{\|v\|}{\|u\|} + \frac{\|v\|^2}{\|u\|^2} \right) \\ &= (\mu_i + \mu_e) \|u\|^2 \left(\left(\frac{\|v\|}{\|u\|} - \frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_e} \right)^2 + \frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_e} - \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_e} \right)^2 \right) \\ &\geq (\mu_i + \mu_e) \|u\|^2 \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_e} - \left(\frac{\mu_i}{\mu_i + \mu_e} \right)^2 \right) \\ &= \frac{\|u\|^2}{\mu_i + \mu_e} \left(\mu_i(\mu_i + \mu_e) - (\mu_i)^2 \right) \\ &= \frac{\mu_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \|u\|^2 . \end{aligned}$$

□

5.2. Discretización del tiempo: formulación variacional incremental

A continuación, desarrollamos una formulación variacional incremental particionando el espacio temporal en una sucesión de intervalos finitos. Antes de presentar nuestros resultados introduciremos algunas suposiciones y notaciones. La densidad del potencial incremental se define como,

$$g_n(\Phi, \nabla\Phi, r) := \tau\psi\left(\frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r - r_n}{\tau}\right) + E(\Phi, \nabla\Phi, r) - \{I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s\phi^e\} \tag{5.31}$$

donde $\tau = t_{n+1} - t_n$, y el correspondiente incremento de potencial es definido como,

$$G_n[\Phi, r] := \int_{\mathcal{B}} g_n(\Phi, \nabla\Phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi^e\, dS. \tag{5.32}$$

En lo que sigue se supondrá que el potencial $F(\phi^m, r)$ en (5.20) es de clase $C^2(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^M, \mathbb{R})$ y que existen exponentes $\gamma \geq 2$ y $2^* := \dfrac{2N}{N-2}$, $N \geq 3$ tal que

$$|F(\phi^m, r)| \leq A\left(|\phi^m|^{2^*} + |r|^\gamma + 1\right), \tag{5.33}$$

$$|I_{ion}(\phi^m, r)| \leq A\left(|\phi^m|^{2^*-1} + |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}} + 1\right), \text{ y} \tag{5.34}$$

$$|f^r(\phi^m, r)| \leq A\left(|\phi^m|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})} + |r|^{\gamma-1} + 1\right), \tag{5.35}$$

para todo $(\phi^m, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M$ y alguna constante $A > 0$.

El potencial transmembranal Φ y la variable de estado r supondremos pertenecen a los espacios funcionales

$$\mathcal{S} = \left\{\Phi = \begin{pmatrix}\phi^m \\ \phi^e\end{pmatrix} \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) : \phi^e = \bar{\phi}^e \in \partial\mathcal{B}_\Phi\right\} \text{ y } \mathcal{V} = \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M),$$

respectivamente, donde $\gamma \geq 2$ es el exponente en (5.33)–(5.37).

También supondremos que

$$\text{Para } \phi \in \mathcal{S} \text{ fijo } \exists \mathcal{M}, \mathcal{N} \geq 0 : \begin{cases} |F(\phi^m, r)| \leq \mathcal{M}(1 + |\phi^m|^{2^*} + |r|^p) & \text{si } \gamma = 2,\, p < 2 \\ |F(\phi^m, r)| \leq \mathcal{N}(1 + |\phi^m|^{2^*} - |r|^\gamma) & \text{si } \gamma > 2 \end{cases} \tag{5.36}$$

$$\text{Para } r \in \mathcal{V} \text{ fijo } \exists m \geq 0 : F(\phi, r) \geq m(-1 - |r|^\gamma). \tag{5.37}$$

El menor valor propio de C_r, D_i y D_e, será denotado por C_r^{min}, μ_i y μ_e respectivamente. Además denotaremos por δ_{ϕ^m} y δ_r las constantes elípticas:

$$\delta_{\phi^m} := \inf_{(\phi^m, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M} A_m \frac{\partial I_{ion}}{\partial \phi^m}(\phi^m, r) \ \text{ y } \ \delta_r := \sup_{(\phi^m, r) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^M} \nabla_r f^r(\phi^m, r). \tag{5.38}$$

Por último, denotaremos por $C_{\mathcal{B}}^e = C_{\mathcal{B}}^e(\mathcal{B}, \partial \mathcal{B}_\phi)$ a la constante óptima en la desigualdad de Poincaré:

$$\int_{\mathcal{B}} \eta(x)^2 \, dx \leq C_{\mathcal{B}}^e \int_{\mathcal{B}} |\nabla \eta(x)|^2 \, dx \ \ \forall \eta \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \ t.q. \ \eta = 0 \ en \ \partial \mathcal{B}_\Phi. \tag{5.39}$$

Y denotaremos por C_T a la constante optima dada por el teorema de traza:

$$\|\eta(x)\|^2_{\mathcal{L}^2(\partial \mathcal{B})} \leq C \|\eta(x)\|^2_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} \leq C_T \|\nabla \eta(x)\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}. \tag{5.40}$$

Teorema 5.3. *Sean $F, G_n, \mathcal{S}, \mathcal{V}, C_r^{min}, \mu_i, \mu_e, \delta_r$ y δ_{ϕ^m} las expresiones definidas anteriormente. Supongamos, además que $\Phi_n \in \mathcal{S}, r_n \in \mathcal{V}$ y*

$$\frac{1}{\tau} > \max\left\{ \frac{-\delta_{\phi^m}}{A_m C_m}, \frac{\delta_r}{C_r^{min}} \right\} \ \text{ y que } I_i^s, I_e^s \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}), \bar{q}^e \in \mathcal{L}^2(\partial \mathcal{B}_q). \tag{5.41}$$

Entonces, la forma débil de las ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas (5.10)–(5.17), dadas por

$$\int_{\mathcal{B}} \left\{ A_m C_m \frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau} \eta^m + D \nabla \Phi \cdot \nabla \eta + A_m I_{ion}(\phi^m, r) \eta^m - I_i^s(\eta^m + \eta^e) - I_e^s \eta^e \right\} dx$$
$$+ \int_{\partial \mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS = 0 \ \ \forall \eta = \begin{pmatrix} \eta^m \\ \eta^e \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \ t.q. \ \eta = 0 \ en \ \partial \mathcal{B}_\Phi$$
$$\int_{\mathcal{B}} \xi \cdot \left\{ C_r \frac{r - r_n}{\tau} - f^r(\phi^m, r) \right\} dx = 0 \ \ \forall \xi \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M),$$

admite una única solución (Φ_{n+1}, r_{n+1}) determinada por el principio variacional

$$G_n[\Phi_{n+1}, r_{n+1}] = \min_{\Phi \in \mathcal{S}} \max_{r \in \mathcal{V}} G_n[\Phi, r].$$

5.2.1. Continuidad, diferenciabilidad y convexidad-concavidad del funcional de energía

Demostración. (*Teorema* 5.3) Por el teorema de inclusión de Sobolev (TIS), el teorema de traza (ver,[8]) y asumiendo las condiciones de crecimiento de $F(\phi^m, r)$, $G_n[\Phi, r]$ está bien definida como una función de $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$ a $\mathbb{R}$ (esto es, la integral en (5.32) es finita). En efecto, demostrar que G_n está bien definida de $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$ a $\mathbb{R}$, equivale a probar que cada parte de la integral que define G_n es finita. Recordemos la definición de G_n dada en (5.32),

$$
\begin{aligned}
G_n[\Phi, r] &= \int_{\mathcal{B}} g_n(\Phi, \nabla\Phi, r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q^e} \cdot \phi^e \, dS \\
&= \int_{\mathcal{B}} \tau\psi\left(\frac{\phi^m - \phi^m_n}{\tau}, \frac{r - r_n}{\tau}\right) + E(\Phi, \nabla\Phi, r) - \{I^s_i(\phi^m + \phi^e) + I^s_e\phi^e\}\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q^e} \cdot \phi^e \, dS \\
&= \int_{\mathcal{B}} \tau\left\{\frac{1}{2}A_m C_m \left(\frac{\phi^m - \phi^m_n}{\tau}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\cdot C_r\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right\} dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi + F(\phi^m, r)\, dx - \int_{\mathcal{B}} I^s_i(\phi^m + \phi^e) + I^s_e \phi^e \, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q^e} \cdot \phi^e \, dS \\
&= \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \tau\frac{1}{2}A_m C_m\left(\frac{\phi^m - \phi^m_n}{\tau}\right)^2 dx}_{I_1} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\tau\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\cdot C_r\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) dx}_{I_2} \\
&+ \underbrace{\int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi\, dx}_{I_3} + \underbrace{\int_{\mathcal{B}} F(\phi^m, r)\, dx}_{I_4} - \underbrace{\int_{\mathcal{B}} I^s_i(\phi^m + \phi^e) + I^s_e\phi^e\, dx}_{I_5} + \underbrace{\int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \phi^e \, dS}_{I_6}
\end{aligned}
\tag{5.42}
$$

Para I_1, como $\phi^m \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por el *TIS*, $\phi^m \in \mathcal{L}^{2^*}(\mathcal{B})$. Y como $\mathcal{L}^{2^*}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, entonces $\phi^m \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$. Por la desigualdad de Minkowski $\left(\frac{\phi^m - \phi^m_n}{\tau}\right) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, luego I_1 es finita. Por otra parte, como $r \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$ y $\gamma \geq 2$, se tiene que $r \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}) \subset \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, luego por la desigualdad de Minkowski, $\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) \in \mathcal{L}^2$. Por otro lado, por la desigualdad de Cauchy,

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\cdot C_r\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| &\leq \left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right|\left|C_r\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| \\
&\leq \left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| \|C_r\|_2 \left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right| \\
&= \|C_r\|_2 \left|\left(\frac{r - r_n}{\tau}\right)\right|^2.
\end{aligned}
\tag{5.43}
$$

Por lo tanto I_2 es finita. Así también el que $\Phi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ por definición implica que $\nabla\Phi \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}) \times \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, y

$$|\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi| \leq |\nabla\Phi| \cdot |D\nabla\Phi| \leq |\nabla\Phi| \cdot \|D\|_2 \, |\nabla\Phi| = \|D\|_2 \, |\nabla\Phi|^2 , \tag{5.44}$$

con lo que I_3 es finita. Ahora, mirando (5.33), como $r \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, para ver que I_4 es finita basta con demostrar que $\phi^m \in \mathcal{L}^{2^*}(\mathcal{B})$, lo cual es cierto por el TIS. Por hipótesis $I_i^s, I_e^s \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$ y el que $\Phi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}(\mathcal{B})$ implica, como dijimos anteriormente, que $\phi^e, \phi^m \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, entonces por desigualdad de Hölder I_5 es finita, pues

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{B}} |I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s\phi^e| \; dx &\leq \int_{\mathcal{B}} |I_i^s\phi^m| + \int_{\mathcal{B}} |I_i^s\phi^e| \; dx + \int_{\mathcal{B}} |I_e^s\phi^e| \; dx \\ &\leq \|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \|\phi^m\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + \|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + \|I_e^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} .\end{aligned}$$

Por último, para $\partial\mathcal{B}_q$, por el teorema de trazas, $\mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \hookrightarrow \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B})$, entonces como $\phi^e \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ tenemos que $\phi^e \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B})$. Y por hipótesis $\bar{q}^e \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)$, luego por la desigualdad de Hölder

$$\int_{\partial\mathcal{B}_q} |\bar{q}^e\phi^e| \; dS \leq \|\bar{q}^e\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)} \|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)} < \infty,$$

es decir, I_6 es finita. Esto demuestra que G_n está bien definida como función de $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$ a $\mathbb{R}$.

Con el fin de aplicar la *Proposición 3.1*, es necesario probar que G_n satisface las hipótesis señaladas. Comenzaremos por verificar que se satisfacen (a) y (b), nuevamente por el *TIS* junto con la*Proposición 4.4* y el teorema de traza, se sigue que G_n es continua en Φ y en r con respecto a la convergencia en norma en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ y $\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, respectivamente:

$$\forall r \in \mathcal{V}, \Phi \mapsto G_n[\Phi, r] \text{ es continua con respecto a la norma de } \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \text{ y} \tag{5.45}$$

$$\forall \Phi \in \mathcal{S}, r \mapsto G_n[\Phi, r] \text{ es continua con respecto a la norma de } \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}). \tag{5.46}$$

Nuevamente probar esto equivale a probar la continuidad para cada una de las integrales que define G_n. Ahora, como $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ y $\mathcal{L}^\gamma(B)$ son espacios métricos, basta con probar la continuidad por sucesiones. Primero probaremos (5.45): sea $\{\Phi_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $\Phi_j \longrightarrow \Phi$ en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, es decir, $\phi_j^m \longrightarrow \phi^m$ en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ y $\phi_j^e \longrightarrow \phi^e$ en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$. Por *TIS*

$$\begin{aligned}\left\|\phi_j^m - \phi^m\right\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{B})} &\leq \left\|\phi_j^m - \phi^m\right\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} \quad \forall q \leq 2^* \text{ y} \\ \left\|\phi_j^e - \phi^e\right\|_{\mathcal{L}^q(\mathcal{B})} &\leq \left\|\phi_j^e - \phi^e\right\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} \quad \forall q \leq 2^*,\end{aligned}$$

y como $2 \leq 2^*$,

$$\phi_j^m \longrightarrow \phi^m \text{en } \mathcal{L}^2(\mathcal{B}) \text{ y } \phi_j^e \longrightarrow \phi^e \text{en } \mathcal{L}^2(\mathcal{B}) \tag{5.47}$$

luego

$$\frac{\phi_j^m - \phi_n^m}{\tau} \longrightarrow \frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau} \text{ en } \mathcal{L}^2(\mathcal{B}).$$

Pero,

$$\left| \left\| \frac{\phi_j^m - \phi_n^m}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} - \left\| \frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \right| \leq \left\| \frac{\phi_j^m - \phi_n^m}{\tau} - \frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \longrightarrow 0,$$

por lo tanto

$$\left\| \frac{\phi_j^m - \phi_n^m}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \longrightarrow \left\| \frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})},$$

luego I_1 es continua con respecto a ϕ^m en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$. Por (5.44) y la *Proposición 4.4*

$$\int_{\mathcal{B}} \nabla\Phi_j \cdot D\nabla\Phi_j \, dx \longrightarrow \int_{\mathcal{B}} \nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi \, dx,$$

entonces I_3 es continua en Φ con respecto a la norma en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$. Lo mismo ocurre con I_4: por (5.33) y la *Proposición 4.4*

$$\int_{\mathcal{B}} F(\phi_j^m, r) \, dx \longrightarrow \int_{\mathcal{B}} F(\phi^m, r) \, dx,$$

es decir, I_4 también es continua en ϕ^m. Ahora para I_5: usando (5.47), como $I_i^s, I_e^s \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, por la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{B}} \left| I_i^s(\phi_j^m - \phi^m) + (I_i^s + I_e^s)(\phi_j^e - \phi^e) \right| \, dx \\
&\leq \int_{\mathcal{B}} \left| I_i^s(\phi_j^m - \phi^m) \right| + \int_{\mathcal{B}} \left| I_i^s(\phi_j^e - \phi^e) \right| \, dx + \int_{\mathcal{B}} \left| I_e^s(\phi_j^e - \phi^e) \right| \, dx \\
&\leq \underbrace{\|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}}_{<\infty} \underbrace{\left\|\phi_j^m - \phi^m\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}}_{<\infty} \underbrace{\left\|\phi_j^e - \phi^e\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}}_{\longrightarrow 0} + \underbrace{\|I_e^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}}_{<\infty} \underbrace{\left\|\phi_j^e - \phi^e\right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}}_{\longrightarrow 0},
\end{aligned}$$

entonces I_5 es continua en Φ. Por último, para I_6, por el teorema de traza,

$$\left\|\phi_j^e - \phi^e\right\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B})} \leq \left\|\phi_j^e - \phi^e\right\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})},$$

por lo tanto $\phi_j^e \longrightarrow \phi^e$ en $\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)$. Como $\bar{q^e} \in \mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)$ se tiene, por la desigualdad de Hölder,

$$\int_{\partial\mathcal{B}_q} \left| \bar{q^e} \cdot (\phi_j^e - \phi^e) \right| \, dS \leq \underbrace{\|\bar{q^e}\|_{\partial\mathcal{B}_q}}_{<\infty} \underbrace{\left\|\phi_j^e - \phi^e\right\|_{\mathcal{L}(\partial\mathcal{B}_q)}}_{\longrightarrow 0}$$

luego,

$$\int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi_j^e \, dS \longrightarrow \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi^e \, dS,$$

es decir, I_6 es continua en ϕ^e. Hemos demostrado que $G_n[\Phi_j, r] \longrightarrow G_n[\Phi, r]$, esto es, $G_n[\Phi, r]$ es continua en Φ con respecto a la norma en $\mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$.

Ahora, para probar (5.46), sea $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión tal que $r_j \longrightarrow r$ en $\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, con $\gamma \geq 2$. Por (5.43) y la *Proposición 4.4*

$$\int_{\mathcal{B}} \left(\frac{r_j - r_n}{\tau}\right) \cdot C_r \left(\frac{r_j - r_n}{\tau}\right) dx \longrightarrow \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) \cdot C_r \left(\frac{r - r_n}{\tau}\right) dx,$$

por lo tanto I_2 es continua en r con respecto a la norma en $\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$. Lo mismo ocurre con I_4: por (5.33) y la *Proposición 4.4*

$$\int_{\mathcal{B}} F(\phi^m, r_j)\, dx \longrightarrow \int_{\mathcal{B}} F(\phi^m, r)\, dx,$$

es decir, I_4 también es continua en r. Se demuestra así que $G_n[\Phi, r_j] \longrightarrow G_n[\Phi, r]$, esto es $G_n[\Phi, r]$ es continua en r con respecto a la norma en $\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, si $\gamma \geq 2$.

Lo segundo es verificar que $G_n[\Phi, r]$ satisface (b) y (d). Para cada $\Phi \in \mathcal{S}$ fijo, por (5.42) tenemos que

$$G_n[\Phi, r] \leq C(\Phi, \phi_n) + \int_{\mathcal{B}} F(\phi^m, r)\, dx - \frac{1}{2}\tau C_r^{min} \left\| \frac{r - r_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2}^2,$$

donde $C(\Phi, \phi_n^m) = I_1 + I_3 - I_5 + I_6$ (aquí es fundamental recordar que C_r es simétrica, definida positiva y C_r^{min} es el menor de sus valores propios). Además,

$$\left\| \frac{r - r_n}{\tau} \right\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2 \geq \frac{\|r\|_{\mathcal{L}^2}^2}{2\tau^2} - \frac{\|r_n\|_{\mathcal{L}^2}^2}{\tau^2},$$

luego

$$G_n[\Phi, r] \leq C(\Phi, \phi_n^m) + \int_{\mathcal{B}} F(\phi^m, r)\, dx - \frac{1}{2}\tau C_r^{min} \left(\frac{\|r\|_{\mathcal{L}^2}^2}{2\tau^2} - \frac{\|r_n\|_{\mathcal{L}^2}^2}{\tau^2} \right).$$

Entonces, si $\gamma = 2$, gracias a (5.36) y recordando que $\|r\|_{\mathcal{V}} = \|r\|_{\mathcal{L}^\gamma}$ tenemos que para cada Φ fijo:

$$\begin{aligned} G_n[\Phi, r] &\leq C(\Phi, \phi_n^m) + \mathcal{M} \int_{\mathcal{B}} \left(|\phi^m|^{2^*} + |r|^p + 1 \right) dx - \frac{1}{2}\tau C_r^{min} \left(\frac{\|r\|_{\mathcal{L}^2}^2}{2\tau^2} - \frac{\|r_n\|_{\mathcal{L}^2}^2}{\tau^2} \right) \\ &\leq C(\Phi, \phi_n^m, r_n) - \int_{\mathcal{B}} \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} |r|^2 - \mathcal{M}\, |r|^p \right) dx. \end{aligned}$$

Analizando la última desigualdad tenemos que si $|r| \geq 1$ entonces

$$\frac{C_r^{min}}{4\tau}|r|^2 - \mathcal{M}|r|^p = r^2\left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \frac{\mathcal{M}}{|r|^{2-p}}\right) \geq r^2\left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M}\right) \geq r^2\left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M}\right) - \mathcal{M},$$

ahora si $0 \leq |r| \leq 1$ tenemos que $|r|^p \leq 1$, luego,

$$\frac{C_r^{min}}{4\tau}|r|^2 - \mathcal{M}|r|^p \geq \frac{C_r^{min}}{4\tau}|r|^2 - \mathcal{M} \geq \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M}\right)|r|^2 - \mathcal{M},$$

en ambos casos

$$\frac{C_r^{min}}{4\tau}|r|^2 - \mathcal{M}|r|^p \geq \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - \mathcal{M}\right)|r|^2 - \mathcal{M},$$

entonces

$$G_n[\Phi, r] \leq C(\Phi, \phi_n^m, r_n) - \left(\frac{C_r^{min}}{4\tau} - M\right)\int_{\mathcal{B}} |r|^2\, dx.$$

Concluimos que $\lim\limits_{\substack{r\in\mathcal{V} \\ \|r\|_{\mathcal{V}}\to\infty}} G_n[\Phi, r] = -\infty$. Ahora si $\gamma > 2$, también obtenemos este límite pues por (5.36)

$$\begin{aligned} G_n[\Phi, r] &\leq C(\Phi, \Phi_n) + \mathcal{N}\int_{\mathcal{B}} \left(|\phi^m|^{2^*} - |r|^\gamma + 1\right) dx - \frac{1}{2}\tau C_r^{min}\left\|\frac{r - r_n}{\tau}\right\|_{\mathcal{L}^2}^2 \\ &\leq C(\Phi, \Phi_n) + \mathcal{N}\int_{\mathcal{B}} \left(|\phi^m|^{2^*} - |r|^\gamma + 1\right) dx. \end{aligned}$$

Análogamente, para cada r fijo, por (5.37) y (5.42)

$$\begin{aligned} G_n[\Phi, r] \geq \int_{\mathcal{B}} \tau\frac{1}{2}A_m C_m\left(\frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau}\right)^2 dx + \int_{\mathcal{B}} \frac{1}{2}\nabla\Phi\cdot D\nabla\Phi\, dx + \int_{\mathcal{B}} (-1 - |r|^\gamma)\, dx \\ - \int_{\mathcal{B}} I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s\phi^e\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q^e}\cdot\phi^e\, dS + C(r, r_n), \end{aligned}$$

donde $C(r, r_n) := -I_2$. Considerando el *Lema 5.1* y la desigualdad de Hölder,

$$\begin{aligned} G_n[\Phi, r] \geq& \int_{\mathcal{B}} \frac{A_m C_m}{4\tau}|\phi^m|^2 + \mu_{min}\|\nabla\phi^m\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2 + \mu_{min}\|\nabla\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2 - \|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\|\phi^m\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \\ & - \|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} - \|I_e^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} - \|\bar{q^e}\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)}\|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)} \\ & + C(r, r_n, \phi_n^m) \\ =& \int_{\mathcal{B}} \frac{A_m C_m}{4\tau}|\phi^m|^2 + \mu_{min}\|\nabla\phi^m\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2 + \mu_{min}\|\nabla\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}^2 - \|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\|\phi^m\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \\ & - \left(\|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + \|I_e^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\right)\|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} - \|\bar{q^e}\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)}\|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)} + C(r, r_n, \phi_n^m). \end{aligned}$$

Por (2.3), (5.39) y (5.40) tenemos que $\|\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)} \leq C\,\|\phi^e\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{B})} \leq C_T\,\|\nabla\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}$, luego,

$$\begin{aligned} G_n[\Phi, r] \geq &\int_{\mathcal{B}} \frac{A_m C_m}{4\tau}\,|\phi^m|^2 - \|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\,\|\phi^m\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + \mu_{min}\,\|\nabla\phi^m\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + \mu_{min}\,\|\nabla\phi^e\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} \\ &- \Big(C^e_{\mathcal{B}}\,\|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + C^e_{\mathcal{B}}\,\|I_e^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + C_T\,\|\bar{q}^e\|_{\mathcal{L}^2(\partial\mathcal{B}_q)}\Big)\,\|\nabla\phi^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + C(r, r_n, \phi_n^m), \end{aligned} \tag{5.48}$$

y en vista de la *Proposición 4.5* tenemos,

$$\begin{aligned} G_n[\phi, r] &\geq C(\|\nabla\phi^m\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} - 1) + \mu_{min}\,\|\nabla\phi^m\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} + C(\|\nabla\phi^e\|^2_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} - 1) + C(r, r_n, \phi_n^m) \\ &\geq C(\|\Phi\|^2_{\mathcal{H}(\mathcal{B})} - 1). \end{aligned}$$

De la ultima desigualdad concluimos que $\displaystyle\lim_{\substack{\Phi\in\mathcal{S} \\ \|\Phi\|_{\mathcal{S}}\to\infty}} G[\Phi, r] = \infty\ \forall r \in \mathcal{V}$.

Lo tercero es verificar que $G_n[\Phi, r]$ es estrictamente convexo-cóncavo. En efecto, primero fijando $r \in \mathcal{V}$, sean $\Phi_1 := \begin{pmatrix}\phi_1^m \\ \phi_1^e\end{pmatrix}$, $\Phi_2 := \begin{pmatrix}\phi_2^m \\ \phi_2^e\end{pmatrix} \in \mathcal{S}$ y $\lambda \in (0,1)$, definamos $\Phi_\lambda := (1-\lambda)\Phi_1 + \lambda\Phi_2$. Debemos demostrar (2.8), i.e.:

$$(1-\lambda)G_n[\Phi_1, r] + \lambda G_n[\Phi_2, r] - G_n[\Phi_\lambda, r] \geq 0.$$

Aplicamos (4.34) a las funciones cuadráticas que definen G_n. Primero analicemos $\tau\psi\left(\dfrac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau}, \dfrac{r - r_n}{\tau}\right)$. Definiendo $H(\sigma) := \tau\dfrac{1}{2}A_m C_m \sigma^2,\ \sigma \in \mathbb{R}$ obtenemos

$$\begin{aligned} (1-\lambda)H\left(\frac{\phi_1^m - \phi_n^m}{\tau}\right) + \lambda H\left(\frac{\phi_2^m - \phi_n^m}{\tau}\right) - H\left(\frac{\phi_\lambda^m - \phi_n^m}{\tau}\right) \\ = \frac{1}{2}\frac{A_m C_m}{\tau}\lambda(1-\lambda)(\phi_2^m - \phi_1^m)^2. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Ahora para $E(\Phi, \nabla\Phi, r)$, tomemos $H(\sigma) := \dfrac{1}{2}\sigma\cdot D\sigma,\ \sigma \in \mathbb{R}^{2N}$ entonces,

$$(1-\lambda)H(\nabla\Phi_1) + \lambda H(\nabla\Phi_2) - H(\nabla\Phi_\lambda) = \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\nabla(\Phi_2 - \Phi_1)\cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1).$$

En el caso de $F(\phi^m, r)$, el teorema de Taylor nos dice que,

$$F(\phi^m) = F(\phi_\lambda^m) + F'(\phi_\lambda^m)(\phi^m - \phi_\lambda^m) + F''(\xi)\frac{(\phi^m - \phi_\lambda^m)^2}{2} \text{ con } \xi \text{ entre } \phi^m \text{ y } \phi_\lambda^m$$

luego

$$F(\phi_1^m) = F(\phi_\lambda^m) + F'(\phi_\lambda^m)(\phi_1^m - \phi_\lambda^m) + F''(\xi_1)\frac{(\phi_1^m - \phi_\lambda^m)^2}{2} \text{ con } \xi_1 \text{ entre } \phi_1^m \text{ y } \phi_\lambda^m, \text{ y}$$
$$F(\phi_2^m) = F(\phi_\lambda^m) + F'(\phi_\lambda^m)(\phi_2^m - \phi_\lambda^m) + F''(\xi_2)\frac{(\phi_2^m - \phi_\lambda^m)^2}{2} \text{ con } \xi_2 \text{ entre } \phi_2^m \text{ y } \phi_\lambda^m.$$

Entonces,

$$(1-\lambda)F(\phi_1^m) + \lambda F(\phi_2^m) - F(\phi_\lambda^m) = (1-\lambda)F''(\xi_1)\frac{(\phi_1^m - \phi_\lambda^m)^2}{2} + \lambda F''(\xi_2)\frac{(\phi_2^m - \phi_\lambda^m)^2}{2}$$

pero $\phi_1^m - \phi_\lambda^m = -\lambda(\phi_2^m - \phi_1^m)$ y $\phi_2^m - \phi_\lambda^m = (1-\lambda)(\phi_2^m - \phi_1^m)$ luego,

$$\begin{aligned}
&= (1-\lambda)F''(\xi_1)\lambda^2\frac{(\phi_2^m - \phi_1^m)^2}{2} + \lambda F''(\xi_2)(1-\lambda)^2\frac{(\phi_2^m - \phi_1^m)^2}{2} \\
&= \frac{(\phi_2^m - \phi_1^m)^2}{2}(1-\lambda)\lambda\{\lambda F''(\xi_1) + (1-\lambda)F''(\xi_2)\} \\
&\geq \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{(\partial\phi^m)^2}\right)\frac{(\phi_2^m - \phi_1^m)^2}{2}(1-\lambda)\lambda.
\end{aligned} \tag{5.50}$$

Así

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)E(\Phi_1) + \lambda E(\Phi_2) - E(\Phi_\lambda) \\
&\geq \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\nabla(\Phi_2 - \Phi_1)\cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1) + \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{(\partial\phi^m)^2}\right)\frac{(\phi_2^m - \phi_1^m)^2}{2}\lambda(1-\lambda).
\end{aligned}$$

Y en el caso de $\{I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s\phi^e\}$, es lineal tanto en ϕ^m como ϕ^e, luego es convexo. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)g_n(\Phi_1) + \lambda g_n(\Phi_2) - g_n(\Phi_\lambda) \\
&\quad \geq \frac{1}{2}\frac{A_m C_m}{\tau}\lambda(1-\lambda)(\phi_2^m - \phi_1^m)^2 + \frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\nabla(\Phi_2 - \Phi_1)\cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1) \\
&\qquad + \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{(\partial\phi^m)^2}\right)\frac{(\phi_2^m - \phi_1^m)^2}{2}\lambda(1-\lambda) \\
&\quad \geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left\{\frac{A_m C_m}{\tau}(\phi_2^m - \phi_1^m)^2 + \nabla(\Phi_2 - \Phi_1)\cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1)\right. \\
&\qquad \left. + \left(\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{(\partial\phi^2)^m}\right)(\phi_2^m - \phi_1^m)^2\right\}
\end{aligned}$$

Notar por último, que la integral sobre $\partial\mathcal{B}_q$ es lineal en ϕ^e, luego ya es convexa. Así tenemos:

$$\frac{2}{\lambda(1-\lambda)}((1-\lambda)G_n[\Phi_1, r] + \lambda G_n[\Phi_2, r] - G_n[(1-\lambda)\Phi_\lambda, r])$$

$$\geq \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{A_m C_m}{\tau} (\phi_2^m - \phi_1^m)^2 + \nabla(\Phi_2 - \Phi_1) \cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1) \right.$$
$$\left. + \left(\operatorname*{ínf}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{(\partial \phi^m)^2} \right) (\phi_2^m - \phi_1^m)^2 \right\} dx.$$

Por definición (5.38), $\delta_{\phi^m} := \operatorname*{ínf}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} A_m \dfrac{\partial I_{ion}}{\partial \phi^m}(\phi^m, r) = \operatorname*{ínf}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \dfrac{\partial^2 F}{(\partial \phi^m)^2}(\phi^m, r)$, luego

$$= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{A_m C_m}{\tau} (\phi_2^m - \phi_1^m)^2 + \nabla(\Phi_2 - \Phi_1) \cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1) + \delta_{\phi^m} (\phi_2^m - \phi_1^m)^2 \right\} dx$$
$$= \left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m} \right) \int_{\mathcal{B}} (\phi_2^m - \phi_1^m)^2 \, dx + \int_{\mathcal{B}} \nabla(\Phi_2 - \Phi_1) \cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1) \, dx$$

Usando el *Lema 5.2* $\nabla(\Phi_2 - \Phi_1) \cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1) \geq \dfrac{\mu_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \left\| \nabla(\phi_2^m - \phi_1^m) \right\|^2$, luego

$$\geq \left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m} \right) \int_{\mathcal{B}} (\phi_2^m - \phi_1^m)^2 \, dx + \frac{\mu_i \mu_e}{\mu_i + \mu_e} \int_{\mathcal{B}} \left\| \nabla(\phi_2^m - \phi_1^m) \right\|^2 \, dx.$$

Por último como D_i y D_e son definidas positivas, se tiene

$$\geq \left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m} \right) \int_{\mathcal{B}} (\phi_2^m - \phi_1^m)^2 \, dx$$

lo que prueba, en virtud de (6.20), que $G_n[\cdot, r]$ es estrictamente convexa para todo $r \in \mathcal{V}$. Pues:

$$\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m} > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{\tau} > -\frac{\delta_{\phi^m}}{A_m C_m}.$$

Del mismo modo, $G_n[\phi, r]$ es estrictamente cóncavo en r. En efecto, fijando $\Phi \in \mathcal{S}$, sean $r_1, r_2 \in \mathcal{V}$, y $\lambda \in [0, 1]$, definamos $r_\lambda = (1-\lambda) r_1 + \lambda r_2$. Por demostrar (2.9), ie:

$$(1-\lambda) G_n[\Phi, r_1] + \lambda G_n[\Phi, r_2] - G_n[\Phi, r_\lambda] \leq 0.$$

Análogamente, distinguimos las funciones cuadráticas que definen G_n y aplicamos (4.34). Primero analicemos $\tau\Psi\left(\dfrac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau}, \dfrac{r - r_n}{\tau} \right)$. Definiendo $H(\sigma) := \tau \dfrac{1}{2} \sigma \cdot C_r \sigma, \ \sigma \in \mathbb{R}^M$, obtenemos

$$(1-\lambda) H\left(\frac{r_1 - r_n}{\tau} \right) + \lambda H\left(\frac{r_2 - r_n}{\tau} \right) - H\left(\frac{r_\lambda - r_n}{\tau} \right) = \frac{1}{2\tau} \lambda (1-\lambda)(r_2 - r_1) \cdot C_r (r_2 - r_1).$$

Ahora para $E(\Phi, \nabla\Phi, r)$, sólo nos interesa $F(\phi^m, r)$, entonces tenemos

$$(1-\lambda) F(r_1) + \lambda F(r_2) - F(r_\lambda) = \frac{(r_2 - r_1)^2}{2} \lambda (1-\lambda) \{ \lambda F''(\xi_1) + (1-\lambda) F''(\xi_2) \}$$

con ξ_i entre r_i y r_λ, para $i = 1, 2$

$$\leq \left(\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right) \frac{(r_2 - r_1)^2}{2} \lambda(1-\lambda).$$

Notar además que $\{I_i^s(\phi^m \phi^e) + I_e^s \phi^e\}$ no depende de r, por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&(1-\lambda)g_n(r_1) + \lambda g_n(r_2) - g_n(r_\lambda) \\
&\quad\leq -\frac{1}{2\tau}\lambda(1-\lambda)(r_2 - r_1)\cdot C_r(r_2 - r_1) + \left(\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right) \frac{(r_2 - r_1)^2}{2}\lambda(1-\lambda) \\
&\quad\leq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \left\{ -\frac{1}{\tau}(r_2 - r_1)\cdot C_r(r_2 - r_1) + \left(\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right)(r_2 - r_1)^2 \right\}.
\end{aligned}$$

Notar, por último, que la integral sobre $\partial\mathcal{B}_q$ tampoco depende de r. Así tenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{\lambda(1-\lambda)}((1-\lambda)G_n[\Phi, r_1] + \lambda G_n[\Phi, r_2] - G_n[\Phi, r_\lambda]) \\
&\qquad\leq \int_{\mathcal{B}} \left\{ -\frac{1}{\tau}(r_2 - r_1)\cdot C_r(r_2 - r_1) + \left(\sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \right)(r_2 - r_1)^2 \right\} dx;
\end{aligned}$$

por definición (5.38), $\delta_r := \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \nabla_r f^r(\phi^m, r) = \sup_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{\partial r^2}(\phi^m, r)$

$$= \int_{\mathcal{B}} \left\{ -\frac{1}{\tau}(r_2 - r_1)\cdot C_r(r_2 - r_1) + \delta_r(r_2 - r_1)^2 \right\} dx.$$

Como $r\cdot C_r r \geq C_r^{min}\|r\|^2$, con C_r^{min} el menor valor propio de C_r,

$$\leq \left(-\frac{C_r^{min}}{\tau} + \delta_r \right) \int_{\mathcal{B}} \|r_2 - r_1\|^2 \, dx.$$

lo que prueba en virtud de (6.20) que $G_n[\Phi, \cdot]$ es estrictamente cóncava para todo $\Phi \in \mathcal{S}$, pues:

$$-\frac{C_r^{min}}{\tau} + \delta_r < 0 \iff \frac{1}{\tau} > \frac{\delta_r}{C_r^{min}}.$$

Por último nos queda probar que G_n es Gâteaux diferenciable, siempre que $F(\phi^m, r)$ satisfaga las condiciones de crecimiento (5.33)–(5.35), y que sus derivadas parciales están dadas por

$$\begin{aligned}
\langle D_\Phi G_n[\Phi, r], \eta \rangle = &\int_{\mathcal{B}} A_m C_m \frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau}\eta^m + D\nabla\Phi\cdot\nabla\eta + A_m I_{ion}(\phi^m, r)\eta^m \, dx \\
&- \int_{\mathcal{B}} I_i^s(\eta^m + \eta^e) + I_e^s \eta^e \, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS, \\
&\forall \eta = \begin{pmatrix} \eta^m \\ \eta^e \end{pmatrix} \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \; t.q. \; \eta = 0 \; en \; \partial\mathcal{B}_\Phi
\end{aligned}$$

$$\langle D_r G_n[\Phi, r], \xi\rangle = \int_{\mathcal{B}} \xi \cdot \left\{ -C_r \frac{r - r_n}{\tau} + f^r(\phi^m, r) \right\} dx, \quad \forall \xi \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M).$$

En efecto, para $\lambda \in (0,1)$ y $\eta \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ *t.q.* $\eta = 0$ *en* $\partial\mathcal{B}_\Phi$, por definición (2.10) la derivada parcial de G_n con respecto a Φ corresponde a:

$$\begin{aligned}
&\langle D_\Phi G_n[\Phi, r], \eta\rangle = \lim_{\lambda \to 0^+} \frac{G_n[\Phi + \lambda\eta, r] - G_n[\Phi, r]}{\lambda} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \left\{ \int_{\mathcal{B}} \frac{g_n(\Phi + \lambda\eta, \nabla(\Phi + \lambda\eta), r) - g_n(\Phi, \nabla\Phi, r)}{\lambda} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \frac{\bar{q}^e \cdot (\phi^e + \lambda\eta^e) - \bar{q}^e \cdot \phi^e}{\lambda} dS \right\} \\
&= \lim_{\lambda \to 0^+} \int_{\mathcal{B}} \frac{g_n(\Phi + \lambda\eta, \nabla(\Phi + \lambda\eta), r) - g_n(\Phi, \nabla\Phi, r)}{\lambda} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS.
\end{aligned}$$

Nos gustaría intercambiar el límite con la integral, para esto notamos que:

$$\frac{g_n(\Phi + \lambda\eta, \nabla(\Phi + \lambda\eta), r) - g_n(\Phi, \nabla\Phi, r)}{\lambda} = \fint_0^\lambda \frac{\partial g_n}{\partial s}(\Phi + s\eta, \nabla(\Phi + s\eta), r) \, ds$$

luego,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{g_n(\Phi + \lambda\eta, \nabla(\Phi + \lambda\eta), r) - g_n(\Phi, \nabla\Phi, r)}{\lambda} \right| \leq \fint_0^\lambda \left| \frac{\partial g_n}{\partial s}(\Phi + s\eta, \nabla(\Phi + s\eta), r) \right| ds \\
&\leq \fint_0^\lambda \left| A_m C_m \left(\frac{\phi^m + s\eta^m - \phi_n^m}{\tau} \right) \eta^m \right| ds + \fint_0^\lambda |\nabla\eta \cdot D\nabla(\Phi + s\eta)| \, ds \\
&+ \fint_0^\lambda \left| \frac{\partial F}{\partial \phi^m}(\phi^m + s\eta^m, r)\eta^m \right| ds + \fint_0^\lambda |I_i^s(\eta^m + \eta^e) + I_e^s \eta^e| \, ds.
\end{aligned}$$

Acotando cada parte, tenemos primero:

$$\begin{aligned}
\left| A_m C_m \left(\frac{\phi^m + s\eta^m - \phi_n^m}{\tau} \right) \eta^m \right| &\leq \frac{A_m C_m}{\tau} \left(|\phi^m| + |\eta^m| + |\phi_n^m| \right) |\eta^m| \\
&= \frac{A_m C_m}{\tau} \left(|\phi^m| |\eta^m| + |\eta^m|^2 + |\phi_n^m| |\eta^m| \right).
\end{aligned}$$

Como $\phi^m, \phi_n^m, \eta^m \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por el *TIS*, $\phi^m, \phi_n^m, \eta^m \in \mathcal{L}^q(\mathcal{B}) \ \ \forall q \leq 2^*$, con esto $|\phi^m|^2, |\phi_n^m|^2, |\eta^m|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Por la desigualdad de Hölder, $|\phi^m| |\eta^m|$, $|\phi_n^m| |\eta^m| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$ pues,

$$\int |\phi^m| |\eta^m| \leq \|\phi^m\|_{\mathcal{L}^2} \|\eta^m\|_{\mathcal{L}^2} < \infty \text{ y } \int |\phi_n^m| |\eta^m| \leq \|\phi^m\|_{\mathcal{L}^2} \|\eta^m\|_{\mathcal{L}^2} < \infty,$$

lo que muestra que $\left|A_m C_m\left(\dfrac{\phi^m + s\eta^m - \phi_n^m}{\tau}\right)\eta^m\right| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Del mismo modo,

$$\begin{aligned}
|\nabla\eta \cdot D\nabla(\Phi + s\eta)| &\leq |\nabla\eta|\,\|D\|_2\,|\nabla(\Phi + s\eta)| \\
&\leq |\nabla\eta|\,\|D\|_2\,(|\nabla\Phi| + |\nabla\eta|) \\
&\leq 2\,\|D\|_2\,(|\nabla\Phi|^2 + |\nabla\eta|^2).
\end{aligned}$$

Como $\Phi, \eta \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por definición $\nabla\Phi, \nabla\eta \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}) \times \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, con lo que $\|D\|_2\,(|\nabla\Phi|^2 + |\nabla\eta|^2) \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Además,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial F}{\partial\phi^m}(\phi^m + s\eta^m, r)\eta^m\right| &= |A_m I_{ion}(\phi^m + s\eta^m, r)\eta^m| \text{ y por (5.34)} \\
&\leq A_m A\left(|\phi^m + s\eta^m|^{2^*-1} + |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}} + 1\right)|\eta^m| \\
&\leq A_m A\left((|\phi^m| + |\eta^m|)^{2^*-1} + A\,|r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}} + 1\right)|\eta^m| \\
&\leq A_m A\left((|\phi^m| + |\eta^m|)^{2^*} + A\,|r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}\,|\eta^m| + |\eta^m|\right) \\
&\leq 2^{2^*-1} A_m A\left(|\phi^m|^{2^*} + A\,|\eta^m|^{2^*} + A\,|r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}\,|\eta^m| + B\,|\eta^m|\right).
\end{aligned}$$

Nuevamente como $\phi^m, \eta^m \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por el *TIS*, $\phi^m, \eta^m \in \mathcal{L}^q(\mathcal{B}) \quad \forall q \leq 2^*$, con esto $|\phi^m|^{2^*}, |\eta^m|^{2^*}, |\eta^m| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Además, por la desigualdad de Hölder,

$$\int |r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}\,|\eta^m| \leq \left(\int \left(|r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}\right)^{\frac{2N}{N+2}}\right)^{\frac{N+2}{2N}} \left(\int |\eta^m|^{\frac{2N}{N-2}}\right)^{\frac{N-2}{2N}} = \|r\|_{\mathcal{L}^\gamma}^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}\,\|\eta^m\|_{\mathcal{L}^{2^*}} < \infty,$$

así $|r|^{\frac{\gamma(N+2)}{2N}}\,|\eta^m| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$ y por lo tanto $\left|\dfrac{\partial F}{\partial\phi^m}(\phi^m + s\eta^m, r)\eta\right| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Por último,

$$\begin{aligned}
|I_i^s(\eta^m + \eta^e) + I_e^s\eta^e| &\leq |I_i^s|\,|\eta^m + \eta^e| + |I_e^s|\,|\eta^e| \\
&\leq |I_i^s|\,|\eta^m| + |I_i^s|\,|\eta^e| + |I_e^s|\,|\eta^e|,
\end{aligned}$$

por (6.20) y como $\eta^m,\ \eta^e \in \mathcal{L}^q(\mathcal{B})\forall q \leq 2^*$, por la desigualdad de Hölder,$|I_i^s|\,|\eta^m|$, $|I_i^s|\,|\eta^e|$ y $|I_e^s|\,|\eta^e| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$, pues

$$\int_{\mathcal{B}} |I_i^s|\,|\eta^m| \leq \|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\,\|\eta^m\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} < \infty,\ \int_{\mathcal{B}} |I_i^s|\,|\eta^e| \leq \|I_i^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\,\|\eta^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} < \infty \text{ y}$$
$$\int_{\mathcal{B}} |I_e^s|\,|\eta^e| \leq \|I_e^s\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})}\,\|\eta^e\|_{\mathcal{L}^2(\mathcal{B})} < \infty,$$

luego $|I_i(\eta^m + \eta^e) + I_e\eta^e| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$.

En resumen, $\displaystyle\fint_0^\lambda \left|\frac{\partial g_n}{\partial s}(\Phi+s\eta,\nabla(\Phi+s\eta),r)\right| ds$ tiene una cota integrable (uniforme con respecto a λ). Por el *TCD* podemos intercambiar el límite con la integral, con lo que G_n es Gâteaux diferenciable con respecto a Φ y la derivada parcial está dada por:

$$
\begin{aligned}
&\langle D_\phi G_n[\Phi,r],\eta\rangle\\
&=\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathcal{B}}\frac{g_n(\Phi+\lambda\eta,\nabla(\Phi+\lambda\eta),r)-g_n(\Phi,\nabla\Phi,r)}{\lambda}\,dx+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}^e\cdot\eta^e\,dS\\
&=\int_{\mathcal{B}}\frac{\partial g_n}{\partial\lambda}[\Phi+\lambda\eta,r]\bigg|_{\lambda=0}dx+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}^e\cdot\eta^e\,dS\\
&=\int_{\mathcal{B}}\left\{A_mC_m\frac{\phi^m+\lambda\eta^m-\phi_n^m}{\tau}\eta^m+\nabla\eta\cdot D\nabla(\Phi+\lambda\eta)+\frac{\partial F}{\partial\phi^m}(\phi^m+\lambda\eta^m,r)\eta^m\right\}\bigg|_{\lambda=0}\\
&-\int_{\mathcal{B}}\{I_i^s(\eta^m+\eta^e)+I_e^s\eta^e\}|_{\lambda=0}\,dx+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}^e\cdot\eta^e\,dS\\
&=\int_{\mathcal{B}}\left\{A_mC_m\frac{\phi^m-\phi_n^m}{\tau}\eta^m+\nabla\eta\cdot D\nabla\Phi+\frac{\partial F}{\partial\phi^m}(\phi^m,r)\eta^m-I_i^s(\eta^m+\eta^e)-I_e^s\eta^e\right\}dx\\
&+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}^e\cdot\eta^e\,dS\\
&=\int_{\mathcal{B}}\left\{A_mC_m\frac{\phi^m-\phi_n^m}{\tau}\eta^m+\nabla\eta\cdot D\nabla\Phi+A_mI_{ion}(\phi^m,r)\eta^m-I_i^s(\eta^m+\eta^e)-I_e^s\eta^e\right\}dx\\
&+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}^e\cdot\eta^e\,dS.
\end{aligned}
$$

Análogamente probaremos que G_n es Gâteaux diferenciable con respecto a r. En efecto, para $\lambda\in(0,1)$ y $\xi\in\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, por definición (2.11) la derivada parcial de G_n con respecto a r corresponde a:

$$
\begin{aligned}
\langle D_rG_n[\Phi,r],\xi\rangle&=\lim_{\lambda\to 0^+}\frac{G_n[\Phi,r+\lambda\xi]-G_n[\Phi,r]}{\lambda}\\
&=\lim_{\lambda\to 0^+}\int_{\mathcal{B}}\frac{g_n(\Phi,\nabla\Phi,r+\lambda\xi)-g_n(\Phi,\nabla\Phi,r)}{\lambda}\,dx.
\end{aligned}
$$

Al igual que anteriormente nos gustaría intercambiar el límite con la integral. Para esto notamos que:

$$
\frac{g_n(\Phi,\nabla\Phi,r+\lambda\xi)-g_n(\Phi,\nabla\Phi,r)}{\lambda}=\fint_0^\lambda\frac{\partial g_n}{\partial s}(\Phi,\nabla\Phi,r+s\xi)\,ds
$$

luego,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{g_n(\Phi,\nabla\Phi,r+\lambda\xi)-g_n(\Phi,\nabla\Phi,r)}{\lambda}\right| &\leq \fint_0^\lambda \left|\frac{\partial g_n}{\partial s}(\Phi,\nabla\Phi,r+s\xi)\right| ds\\
&= \fint_0^\lambda \left|\xi\cdot -C_r\frac{r+s\xi-r_n}{\tau}+\xi\cdot\frac{\partial F}{\partial r}(\phi^m,r+s\xi)\right| ds\\
&\leq \fint_0^\lambda \left|\xi\cdot C_r\frac{r+s\xi-r_n}{\tau}\right| ds + \fint_0^\lambda \left|\xi\cdot\frac{\partial F}{\partial r}(\phi^m,r+s\xi)\right| ds.
\end{aligned}$$

Acotando cada parte, tenemos primero:

$$\begin{aligned}
\left|\xi\cdot C_r\frac{r+s\xi-r_n}{\tau}\right| &\leq \|C_r\|_2\left|\frac{r+s\xi-r_n}{\tau}\right||\xi|\\
&\leq \frac{\|C_r\|_2}{\tau}\left(|r|+|\xi|+|r_n|\right)|\xi|\\
&= \frac{\|C_r\|_2}{\tau}\left(|r|\,|\xi|+|\xi|^2+|r_n|\,|\xi|\right).
\end{aligned}$$

Como $r,r_n,\xi\in\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, $\gamma\geq 2$, $|r|^2,|r_n|^2,|\xi|^2\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Por la desigualdad de Hölder, $|r|\,|\xi|$, $|r_n|\,|\xi|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$, pues,

$$\int_{\mathcal{B}}|r|\,|\xi|\leq\|r\|_{\mathcal{L}^2}\|\xi\|_{\mathcal{L}^2}<\infty \text{ y } \int_{\mathcal{B}}|r_n|\,|\xi|\leq\|r_n\|_{\mathcal{L}^2}\|\xi\|_{\mathcal{L}^2}<\infty,$$

lo que muestra que $\left|\xi\cdot C_r\dfrac{r+s\xi-r_n}{\tau}\right|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$.

Por último, por (5.35),

$$\begin{aligned}
\left|\xi\cdot\frac{\partial F}{\partial r}(\phi^m,r+s\xi)\right| &= |\xi\cdot f^r(\phi^m,r+s\xi)|\\
&\leq A\left(|\phi^m|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}+|r+s\xi|^{\gamma-1}+1\right)|\xi|\\
&\leq A\left(|\phi^m|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}+(|r|+|\xi|)^{\gamma-1}+1\right)|\xi|\\
&\leq A\left(|\phi^m|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}|\xi|+(|r|+|\xi|)^{\gamma}+|\xi|\right)\\
&\leq 2^{\gamma-1}A\left(|\phi^m|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}|\xi|+|r|^\gamma+|\xi|^\gamma+|\xi|\right).
\end{aligned}$$

Nuevamente como $r,\xi\in\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, $\gamma\geq 2$, $|r|^\gamma,|\xi|^\gamma,|\xi|\in\mathcal{L}^1(\mathcal{B})$. Además como $\phi^m\in\mathcal{H}^1(\mathcal{B})$, por el *TIS*, $\phi^m\in\mathcal{L}^q(\mathcal{B})$ $\forall q\leq 2^*$ y por la desigualdad de Hölder,

$$\int|\phi^m|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}|\xi|\leq\left(\int(|\phi^m|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})})^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}\left(\int|\xi|^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}}=\|\phi^m\|_{\mathcal{L}^{2^*}}^{2^*(\frac{\gamma-1}{\gamma})}\|\xi\|_{\mathcal{L}^\gamma}<\infty,$$

luego $|\phi^m|^{2^*(1-\frac{1}{\gamma})}|\xi| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$ y por lo tanto $\left|\xi \cdot \dfrac{\partial F}{\partial r}(\phi^m, r+s\xi)\right| \in \mathcal{L}^1(\mathcal{B})$.

En resumen, $\displaystyle ⨍_0^\lambda \left|\frac{\partial g_n}{\partial s}(\Phi, \nabla\Phi, r+s\xi)\right| ds$ tiene una cota integrable. Por el *TCD* podemos intercambiar el límite con la integral, luego G_n es Gâteaux diferenciable con respecto a r y la derivada parcial está dada por:

$$\begin{aligned}
\langle D_r G_n[\Phi, r], \xi\rangle &= \lim_{\lambda\to 0^+} \int_{\mathcal{B}} \frac{g_n(\Phi, \nabla\Phi, r+\lambda\xi) - g_n(\Phi, \nabla\Phi, r)}{\lambda}\, dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \frac{\partial g_n}{\partial \lambda}(\Phi, \nabla\Phi, r+\lambda\xi)\bigg|_{\lambda=0} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \left\{\xi \cdot -C_r \frac{r+\lambda\xi - r_n}{\tau} + \xi \cdot \frac{\partial F}{\partial r}(\phi^m, r+\lambda\xi)\right\}\bigg|_{\lambda=0} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \xi \cdot \left\{-C_r \frac{r - r_n}{\tau} + \frac{\partial F}{\partial r}(\phi^m, r)\right\} dx \\
&= \int_{\mathcal{B}} \xi \cdot \left\{-C_r \frac{r - r_n}{\tau} + f^r(\phi^m, r)\right\} dx.
\end{aligned}$$

El teorema entonces se sigue de la *Proposición* 3.1, notando que $\Phi+\eta$, $\Phi-\eta$ y $r+\xi$, $r-\xi$ pertenecen a $\mathcal{S}$ y $\mathcal{V}$, respectivamente, para todo $\Phi \in \mathcal{S}$, $\eta \in \mathcal{H}_0^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}_0^1(\mathcal{B})$ y $r, \xi \in \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}, \mathbb{R}^M)$. □

5.3. El problema efectivo de minimización.

Como se dijo en el capítulo anterior, para el propósito de aplicación de elementos finitos, se considerará resolver el problema de maximización localmente. En el caso de bidominio, al igual que en monodominio, también se tiene que maximizar el potencial incremental con respecto a r es equivalente a la maximización de la densidad del potencial incremental. Por lo tanto, el problema de electrofisiología se puede reescribir como

$$\min_{\Phi\in\mathcal{S}} H_n[\Phi], \tag{5.51}$$

donde

$$H_n[\Phi] := \int_{\mathcal{B}} \max_{r\in\mathbb{R}^M} g_n(\Phi(x), \nabla\Phi(x), r)\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e(x)\cdot\phi^e(x)\, dS,$$

lo cual, en vista de (5.31) y (5.20) queda escrito como

$$\begin{aligned}
H_n[\Phi] := &\int_{\mathcal{B}} \left\{\frac{1}{2}\nabla\Phi(x)\cdot D\nabla\Phi(x) + h_n(\phi^m(x), x) - I_i^s(x)(\phi^m(x)+\phi^e(x)) - I_e^s(x)\phi^e(x)\right\} dx \\
&+ \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e(x)\cdot\phi^e(x)\, dS,
\end{aligned}\tag{5.52}$$

con

$$h_n(\phi^m, x) := \max_{r\in\mathbb{R}^M} \left\{ \tau\psi\left(\frac{\phi^m - \phi_n^m(x)}{\tau}, \frac{r - r_n(x)}{\tau}\right) + F(\phi^m, r)\right\}, \phi^m \in \mathbb{R}, x \in \mathcal{B}. \tag{5.53}$$

Lema 5.4. *Si para todo $\Phi \in \mathcal{S}$ existe $r_{\phi^m} \in \mathcal{V}$ tal que*

$$\tau\psi\left(\frac{\phi^m(x) - \phi_n^m(x)}{\tau}, \frac{r_{\phi^m}(x) - r_n(x)}{\tau}\right) + F(\phi^m(x), r_{\phi^m}(x)) = h_n(\phi^m(x), x) \;\; \forall x \in \mathcal{B} \tag{5.54}$$

(es decir, si para todo $x \in \mathcal{B}$ es posible elegir un $r_{\phi^m}(x)$, en el cual el máximo en (5.53) se alcanza, de tal manera que $r_{\phi^m} : \mathcal{B} \longrightarrow \mathbb{R}^M$, como una función de x, pertenezca a $\mathcal{V}$), entonces

$$H_n[\Phi] = \max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\Phi, r] \;\; \forall\Phi \in \mathcal{S}.$$

Demostración. Sea $\Phi \in \mathcal{S}$ y supongamos que (5.54) se cumple. Entonces, por un lado,

$$\begin{aligned}
&\max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\Phi, r] \geq G_n[\Phi, r_{\phi^m}] \\
&= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi + \tau\psi\left(\frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r_{\phi^m} - r_n}{\tau}\right) + F(\phi^m, r_{\phi^m})\right\} dx \\
&- \int_{\mathcal{B}} \{I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s\phi^e\}\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q} \cdot \phi^e\, dS \\
&= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi + h_n(\phi^m, x) - I_i^s(\phi^m + \phi^e) - I_e^s\phi^e \right\} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q^e} \cdot \phi^e\, dS \\
&= H_n[\Phi].
\end{aligned}$$

Por otro lado, para todo $r \in \mathcal{V}$

$$\begin{aligned}
G_n[\Phi, r] &= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi + \tau\psi\left(\frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r - r_n}{\tau}\right) + F(\phi^m, r)\right\}, dx \\
&- \int_{\mathcal{B}} \{I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s\phi^e\}\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q^e} \cdot \phi^e\, dS \\
&\leq \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi + h_n(\phi^m, x) - I_i^s(\phi^m + \phi^e) - I_e^s\phi^e \right\} dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q^e} \cdot \phi^e\, dS \\
&= H_n[\Phi].
\end{aligned}$$

entonces, $\max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\Phi, r] \leq H_n[\Phi]$. Finalmente, $H_n[\Phi] = \max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\Phi, r] \;\; \forall\Phi \in \mathcal{S}$ lo que completa la demostración. □

Como mencionamos en el caso de monodominio, los métodos de descenso de gradiente son ocupados en la solución numérica de (5.51), de forma particular una iteración de Newton-Raphson garantiza la convergencia del método si la función en cuestión es estrictamente convexa [3]. En nuestro caso, la función $F(\phi^m, r)$ que define la densidad del potencial electroquímico puede ser no convexa y por tanto la convexidad del potencial incremental efectivo puede no estar garantizada para valores grandes del paso de tiempo τ, interviniendo en la eficiencia del método. Este problema es reparado en la siguiente proposición, donde se prueba que cuando $\tau \to 0$ el potencial incremental llega a ser estrictamente convexo, lo que implica que el algoritmo de minimización converge a una única solución para τ suficientemente pequeño.

Proposición 5.5. *Una condición suficiente para que H_n sea estrictamente convexa es que*

$$\frac{1}{\tau} > \frac{-\delta_{\phi^m}}{A_m C_m},$$

δ_{ϕ^m} definido como en el Teorema *5.3.*

Demostración. Para todo $\Phi_1 := \begin{pmatrix} \phi_1^m \\ \phi_1^e \end{pmatrix}, \Phi_2 := \begin{pmatrix} \phi_2^m \\ \phi_2^e \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, sea $\Phi_\lambda^m := \begin{pmatrix} \phi_\lambda^m \\ \phi_\lambda^e \end{pmatrix} = (1-\lambda)\Phi_1 + \lambda\Phi_2$, luego

$$\begin{aligned}(1-\lambda)h_n(\phi_1^m) + \lambda h_n(\phi_2^m) \geq \max_{r\in\mathbb{R}^M} \Bigg\{ &(1-\lambda)\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_1^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi_1^m, r)\right) \\ &+ \lambda\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_2^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi_2^m, r)\right)\Bigg\}.\end{aligned}$$

Mientras que para todo $r \in \mathbb{R}^M$ por lo ya hecho en (5.49), se tiene,

$$\begin{aligned}(1-\lambda)\tau\psi\left(\frac{\phi_1^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + \lambda\tau\psi\left(\frac{\phi_2^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) - \tau\psi\left(\frac{\phi_\lambda^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) \\ \geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\frac{A_m C_m}{\tau}(\phi_2^m - \phi_1^m)^2\end{aligned}$$

y por lo hecho en (5.50)

$$(1-\lambda)F(\phi_1^m, r) + \lambda F(\phi_2^m, r) - F(\phi_\lambda^m, r) \geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2} \inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{(\partial\phi^m)^2}(\phi_2^m - \phi_1^m)^2.$$

Por lo tanto, $\forall r \in \mathbb{R}^M$

$$\begin{aligned}&\left\{(1-\lambda)\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_1^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi_1^m, r)\right) + \lambda\left(\tau\psi\left(\frac{\phi_2^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi_2^m, r)\right)\right\} \\ &\geq \left(\tau\psi\left(\frac{\phi_\lambda^m - \phi_n^m}{\tau}, \frac{r-r_n}{\tau}\right) + F(\phi_\lambda^m, r)\right) + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \frac{\partial^2 F}{(\partial\phi^m)^2}\right)(\phi_2^m - \phi_1^m)^2,\end{aligned}$$

por definición (5.38), $\delta_{\phi^m} := \inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} A_m \dfrac{\partial I_{ion}}{\partial \phi^m}(\phi^m, r) = \inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}^M} \dfrac{\partial^2 F}{(\partial\phi^m)^2}(\phi^m, r)$, luego $\forall r \in \mathbb{R}^M$

$$= \left(\tau\psi\left(\frac{\phi^m_\lambda - \phi^m_n}{\tau}, \frac{r - r_n}{\tau}\right) + F(\phi^m_\lambda, r)\right) + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m}\right)(\phi^m_2 - \phi^m_1)^2$$

y entonces,

$$(1-\lambda)h_n(\phi^m_1) + \lambda h_n(\phi^m_2) \geq h_n(\phi^m_\lambda) + \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m}\right)(\phi^m_2 - \phi^m_1)^2.$$

De todo lo anterior se tiene que,

$$\begin{aligned}&(1-\lambda)H_n[\phi^m_1] + \lambda H_n[\phi^m_2] - H_n[\phi^m_\lambda] \\ &\geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\int_{\mathcal{B}}\left\{\nabla(\Phi_2 - \Phi_1)\cdot D\nabla(\Phi_2 - \Phi_1) + \left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m}\right)(\phi^m_2 - \phi^m_1)^2\right\} dx\end{aligned}$$

Usando *Lema* 5.2, con μ_i, μ_e el menor valor propio de D_i, D_e, respectivamente,

$$\geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left\{\int_{\mathcal{B}} \frac{\mu_i\mu_e}{\mu_i + \mu_e}\left\|\nabla(\phi^m_2 - \phi^m_1)\right\|^2 dx + \left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m}\right)\int_{\mathcal{B}}(\phi^m_2 - \phi^m_1)^2\, dx\right\}$$

además tanto D_i como D_e son definidas positivas, luego

$$\geq \frac{\lambda(1-\lambda)}{2}\left(\frac{A_m C_m}{\tau} + \delta_{\phi^m}\right)\int_{\mathcal{B}}(\phi^m_2 - \phi^m_1)^2\, dx$$

□

5.4. Aplicación al modelo de FitzHugh-Nagumo.

Nos interesa estudiar el modelo de FitzHugh-Nagumo pues, como ya mencionamos, este ha sido usado en el modelamiento de la actividad cardíaca en mamíferos. Los términos fuentes de las ecuaciones de electrofisiología de FitzHugh-Nagumo para el modelo de bidominio corresponden a (ver [6]):

$$I_{ion}(\phi^m, r) = h(\phi^m) + \theta r, \tag{5.55}$$
$$f^r(\phi^m, r) = \eta\phi^m - \gamma r, \tag{5.56}$$

donde $\theta, \eta, \gamma \in \mathbb{R}_+$ son constantes y $h \in C^1(\mathbb{R})$ es una función cúbica tal que $\inf_{\mathbb{R}} h' > -\infty$. Particularmente, al igual que en el caso monodominio, consideremos la forma presentada en [16, 17]: los términos fuente y el potencial de tasa toman la forma,

$$
\begin{aligned}
&I_{ion}(\phi^m, r) = c_1\phi^m(\phi^m - \alpha)(\phi^m - 1) + c_2 r,\\
&f^r(\phi^m, r) = c_2(\phi - dr) \text{ y}\\
&\Psi[\dot{\phi^m}, \dot{r}] := \int_{\mathcal{B}} \psi(\dot{\phi^m}, \dot{r})\, dx = \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}(\dot{\phi^m})^2 - \frac{c_2}{2b}\dot{r}^2 \right\} dx
\end{aligned}
$$

respectivamente, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un umbral para la activación eléctrica; $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+$ son constantes positivas que representan la tasa de excitación y el decaimiento de la excitación, respectivamente; y $b, d \in \mathbb{R}_+$ son constantes positivas que representan la tasa de recuperación y el decaimiento de la recuperación, respectivamente. El potencial electroquímico generalizado toma la forma

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}[\phi, r] := \int_{\mathcal{B}} E(\Phi, \nabla\Phi, r)\, dx - \int_B I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s\phi^e\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi^e\, dS\\
&= \int_{\mathcal{B}} \left\{ \frac{1}{2}\nabla\Phi \cdot D\nabla\Phi + c_1\left(\frac{1}{4}(\phi^m)^4 - \frac{(1+\alpha)}{3}(\phi^m)^3 + \frac{\alpha}{2}(\phi^m)^2\right) + c_2\left(\phi^m r - \frac{d}{2}r^2\right)\right\} dx\\
&- \int_B I_i^s(\phi^m + \phi^e) + I_e^s\phi^e\, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi^e\, dS,
\end{aligned}
$$

donde $E : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la densidad del potencial electroquímico la cual puede ser no convexa.

Proposición 5.6. *Supongamos que $N \leq 4$ y que*

$$
\tau < \frac{1}{\frac{c_1}{3}(\alpha^2 - \alpha + 1)}, \tag{5.57}
$$

entonces, las ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas de FitzHugh-Nagumo

$$
\frac{\phi_{n+1} - \phi_n}{\tau} + I_{ion}(\phi^m_{n+1}, r_{n+1}) - \operatorname{div}(D_i\nabla\phi^m_{n+1}) - \operatorname{div}(D_i\nabla\phi^e_{n+1}) = I_i(x, t_{n+1}), \tag{5.58}
$$

$$
-\operatorname{div}(D_i\nabla\phi^m_{n+1}) - \operatorname{div}((D_i + D_e)\nabla\phi^e_{n+1}) = I_i(x, t_{n+1}) + I_e(x, t_{n+1}) \tag{5.59}
$$

$$
\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau} = \frac{b}{c_2} f^r(\phi_{n+1}, r_{n+1}), \tag{5.60}
$$

admiten una única solución débil (ϕ^m_{n+1}, r_{n+1}) determinada por las relaciones

$$
H_n[\Phi_{n+1}] = \min_{\substack{\Phi \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{B}) \\ \phi^e = \bar{\phi}^e \text{ en } \partial B_\Phi}} H_n[\Phi] \quad y \quad r_{n+1} = \frac{r_n + b\tau\phi^m_{n+1}}{1 + db\tau},
$$

donde $H_n[\Phi]$, dado por (5.52), es estrictamente convexo.

Demostración. Esta proposición se sigue del *Teorema 5.3*, el *Lema 5.4* y la *Proposición 5.5*, una vez que comprobemos sus hipótesis. Notar que por las definiciones (5.58), (5.59) y (5.60), en comparación con (5.15), (5.16) y (5.17) se tiene $A_m = 1$, $C_m = 1$ y $C_r = \dfrac{c_2}{b}$. Además para

$$F(\phi^m, r) = c_1 \left(\frac{1}{4}(\phi^m)^4 - \frac{(1+\alpha)}{3}(\phi^m)^3 + \frac{\alpha}{2}(\phi^m)^2 \right) + c_2 \left(\phi^m r - \frac{d}{2} r^2 \right)$$

verificamos las condiciones de las definiciones (5.21) y (5.22) con $M = 1$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial F}{\partial \phi^m} &= c_1((\phi^m)^3 - (1+\alpha)(\phi^m)^2 + \alpha\phi^m) + c_2 r \\
&= c_1 \phi^m(\phi^m - 1)(\phi^m - \alpha) + c_2 r \\
&= I_{ion}(\phi^m, r) \text{ y} \\
\frac{\partial F}{\partial r} &= c_2(\phi^m - dr) = f^r(\phi^m, r).
\end{aligned}$$

Ahora, con el fin de utilizar el *Teorema 5.3* queremos probar que F satisface las hipótesis (5.33)–(5.37) con $\gamma = 2$. Para probar (5.33) es suficiente observar que:

$$\begin{aligned}
&|F(\phi^m, r)| \\
&\leq \left(\frac{c_1}{4} |\phi^m|^4 + \frac{c_1(1+\alpha)}{3}(|\phi^m|^4 + 1) + \frac{c_1\alpha}{2}(|\phi^m|^4 + 1) \right) + c_2 \left(\frac{(\phi^m)^2 + r^2}{2} - \frac{d}{2} r^2 \right) \\
&\leq \left(\frac{c_1}{4} + \frac{c_1(1+\alpha)}{3} + \frac{c_1\alpha}{4} + \frac{c_2}{2} \right) |\phi^m|^4 + \frac{c_2 + d}{2} r^2 + c_1 \left(\frac{1+\alpha}{3} + \frac{\alpha}{4} \right).
\end{aligned}$$

Las condiciones (5.34)–(5.37) se prueban de forma análoga. Por lo tanto, (5.58), (5.59) y (5.60) admite una única solución débil (ϕ^m_{n+1}, r_{n+1}) determinada por:

$$G_n[\Phi_{n+1}, r_{n+1}] = \min_{\Phi \in \mathcal{S}} \max_{r \in \mathcal{V}} G_n[\Phi, r]. \tag{5.61}$$

Para verificar la hipótesis del *Lema 5.4*, notar que:

$$\begin{aligned}
h_n(\phi^m, r) &:= \max_{r \in \mathbb{R}} \left\{ \tau\psi \left(\frac{\phi^m - \phi^m_n}{\tau}, \frac{r - r_n}{\tau} \right) + F(\phi^m, r) \right\} \\
&= \max_{r \in \mathbb{R}} \left\{ \tau \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\phi^m - \phi^m_n}{\tau} \right)^2 - \frac{c_2}{b} \left(\frac{r - r_n}{\tau} \right)^2 \right) + F(\phi^m, r) \right\} \\
&= \max_{r \in \mathbb{R}} \left\{ \frac{1}{2} \frac{(\phi^m - \phi^m_n)^2}{\tau} - \frac{c_2}{b} \frac{(r - r_n)^2}{\tau} + F(\phi^m, r) \right\}.
\end{aligned}$$

Con esto,

$$h_n(\phi^m(x),x) = \tau\psi\left(\frac{\phi^m(x)-\phi_n^m(x)}{\tau}, \frac{r_{\phi^m}(x)-r_n(x)}{\tau}\right) + F(\phi^m(x), r_{\phi^m}(x)), \quad \forall x \in \mathcal{B}$$

$$\Longleftrightarrow h_n(\phi^m(x),x) = \frac{1}{2}\left(\frac{(\phi^m(x)-\phi_n^m(x))^2}{\tau} - \frac{c_2}{b}\frac{(r_{\phi^m}(x)-r_n(x))^2}{\tau}\right) F(\phi^m(x), r_{\phi^m}(x)),$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-c_2(r_{\phi^m}(x)-r_n(x))}{b\tau} + \frac{\partial F}{\partial r}(\phi^m(x), r_{\phi^m}(x)) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \frac{-c_2(r_{\phi^m}(x)-r_n(x))}{b\tau} + c_2(\phi^m(x) - d r_{\phi^m}(x)) = 0$$

$$\Longleftrightarrow r_{\phi^m}(\phi^m) = \frac{r_n(x) + b\tau\phi^m(x)}{1+bd\tau}.$$

Así la condición (5.54) se cumple automáticamente pues $r_n(x) + b\tau\phi^m(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, ya que $r_n(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$, $\phi^m(x) \in \mathcal{H}^1(\mathcal{B})$ y por la desigualdad de Minkowski se tiene que $r_{\phi^m}(x) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B})$. Entonces, por el *Lema 5.4*,

$$H_n[\Phi] = \max_{r\in\mathcal{V}} G_n[\Phi, r] \quad \forall\Phi \in \mathcal{S}. \tag{5.62}$$

Y por último verificamos las hipótesis de la *Proposición 5.5*. El valor de $\inf\limits_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \dfrac{\partial I_{ion}}{\partial\phi^m}$ se obtiene de,

$$\begin{aligned}\frac{\partial I_{ion}}{\partial\phi^m}(\phi^m, r) &= c_1(\phi^m-\alpha)(\phi^m-1) + c_1\phi^m(2\phi^m-\alpha-1)\\ &= c_1\left(3(\phi^m)^2 - 2\alpha\phi^m - 2\phi^m + \alpha\right).\end{aligned}$$

Esta expresión alcanza su ínfimo en:

$$c_1(6\phi^m - 2\alpha - 2) = 0 \Longleftrightarrow \phi^m = \frac{1}{3}(\alpha+1) \text{ con } c_1 \neq 0,$$

luego,

$$\inf_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \frac{\partial I_{ion}}{\partial\phi^m} = \frac{-c_1}{3}(\alpha^2-\alpha+1) < 0, \text{ pues, } \triangle = \sqrt{(-1)^2 - 4\cdot1\cdot1} < 0.$$

Por lo tanto,

$$\delta_{\phi^m} = \frac{-c_1}{3}(\alpha^2-\alpha+1) \text{ y se sigue que } \frac{-\delta_{\phi^m}}{A_mC_m} = \frac{c_1}{3}(\alpha^2-\alpha+1)$$

Por (5.57),

$$\frac{-\delta_{\phi^m}}{A_mC_m} < \frac{1}{\tau},$$

entonces por la *Proposición 5.5*, $H_n[\Phi]$ es estrictamente convexo. (5.63)

En conclusión de (5.61), (5.62) y (5.63) se tiene esta proposición. □

Capítulo 6

Aproximación en tiempo continuo y estimación uniforme del error

Consideremos un sistema de ecuaciones de la forma:

$$\psi'(t) = A(\psi(t)) + B(\psi(t)) \tag{6.1}$$

donde $\psi(t)$ representa la solución para cada tiempo $t > 0$ y A, B son dos operadores. Consideramos ahora la discretización de (6.1), la cual reemplaza la solución $\psi(t)$ por una aproximación $\psi_n \approx \psi(t_n)$ en el tiempo $t_n = n\tau$, donde τ corresponde al paso de tiempo. Una discretización *semi implícita* es aquella donde se expresa $A(\psi)$ implícitamente y $B(\psi)$ explícitamente, es decir, esta se reduce a un método explícito si $A(\psi) \equiv 0$ y a un método implícito si $B(\psi) \equiv 0$. Por ejemplo, combinando el Backward-Euler implícito y Forward-Euler explícito, obtenemos la discretización semi implícita:

$$\frac{\psi_{n+1} - \psi_n}{\tau} = A(\psi_{n+1}) + B(\psi_n). \tag{6.2}$$

Por otro lado, consideremos las ecuaciones del modelo de bidominio (5.1)-(5.3), (5.9)-(5.14), junto con los términos fuentes dados para el modelo particular de FitzHugh-Nagumo (5.55) y (5.56), es decir, el sistema de ecuaciones electrofisiológicas a considerar corresponde a:

$$A_m(C_m\dot{\phi^m} + h(\phi^m) + \theta r) = \operatorname{div}(D_i \nabla \phi^i) + I_i^s, \tag{6.3}$$

$$A_m(C_m\dot{\phi^m} + h(\phi^m) + \theta r) = -\operatorname{div}(D_e \nabla \phi^e) - I_e^s, \tag{6.4}$$

$$C_r \dot{r} = \eta\phi^m - \gamma r, \tag{6.5}$$

Con condiciones de borde,

$$-D_i \nabla(\phi^m + \phi^e) \cdot n = 0, \quad x \in \partial\mathcal{B}, \tag{6.6}$$

$$\phi^e = \bar{\phi}^e, \quad x \in \partial\mathcal{B}_\Phi, \tag{6.7}$$

$$-D_e \nabla\phi^e \cdot n = \bar{q}^e, \quad x \in \partial\mathcal{B}_q, \tag{6.8}$$

y condiciones iniciales dadas por,

$$\phi^m|_{t=0} = \phi_0^m(x), \tag{6.9}$$

$$\phi^e|_{t=0} = \phi_0^e(x), \tag{6.10}$$

$$r|_{t=0} = r_0(x). \tag{6.11}$$

En principio para el modelo de bidominio (6.3)-(6.11), quisiéramos estudiar $\tau \to 0$ para el problema de Backward-Euler implícito dado que son métodos numéricos más robustos y permiten tomar pasos de tiempo más largos (resolver menos sistemas de ecuaciones, asociados a un menor costo computacional). Sin embargo está fuera del alcance de las técnicas que poseemos actualmente y se pospone para un trabajo futuro. La ventaja de trabajar con la semidiscretización mixta (6.2) es que nos lleva a un problema de minimización pura (en lugar del problema minmax que teníamos anteriormente); lo cual se traduce en propiedades de disipación energética (6.45) que simplifican el análisis, como veremos durante las demostraciones.

6.1. Discretización del tiempo: formulación variacional

Para propósitos de este capítulo escribiremos el problema antes presentado (6.3)-(6.5), (5.9)-(5.14) en una forma más compacta, para ello en esta sección introduciremos algunas notaciones y suposiciones preliminares antes de presentar nuestros resultados.

Considerando las definiciones dadas en el *Capítulo 5* para el modelo de bidominio, denotaremos por $u := (\phi^i, \phi^e, r) \in \mathcal{S} \times \mathcal{V}$ al vector de tres componentes que determina el estado eléctrico del corazón. Definimos

$$\lambda := 1 + |\inf_{\phi^m \in \mathbb{R}} h'(\phi^m)|, \; H(\phi^m) := h(\phi^m) + \lambda \phi^m \tag{6.12}$$

$$F(\phi^m) := \int_0^{\phi^m} H(y)\, dy = \frac{1}{2}\lambda(\phi^m)^2 + \int_0^{\phi^m} h(y)\, dy, \tag{6.13}$$

es decir, $\dfrac{\partial F}{\partial \phi^m}(\phi^m) = H(\phi^m)$. Observar que F es una función estrictamente creciente C^1 tal que $\dfrac{\partial H}{\partial \phi^m}(\phi^m) \geq 1$, por lo tanto

$$F(\phi^m) \geq F(0) = 0, \; F(\phi^m) \geq \frac{1}{2}|\phi^m|^2 \;\; \forall \phi^m \in \mathbb{R}, \tag{6.14}$$

esto es, F es una función estrictamente convexa con crecimiento cuadrático (para el caso particular de la función $h(\phi^m)$ de la Sección 5.4 podemos decir más: F

tiene un crecimiento cuártico).

Además sea G_n^τ el funcional dado por:

$$G_n^\tau[u] := \frac{A_m}{2\tau}\int_{\mathcal{B}}\left\{(C_m - \lambda\tau)(\phi^m - \phi_n^m)^2 + C_r(r - r_n)^2\right\}\,dx + A_m\int_{\mathcal{B}} F(\phi^m)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla\phi^i\cdot\nabla\phi^i + D_e\nabla\phi^e\cdot\nabla\phi^e + A_m\gamma r\cdot r\,dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s\phi^m + (I_i^s + I_e^s)\phi^e\,dx$$
$$+\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}^e\phi^e\,dS - A_m\int_{\mathcal{B}}\eta\phi_n^m r - \theta r_n\phi^m + \lambda\phi_n^m\phi^m\,dx. \tag{6.15}$$

Por otra parte, sean $v := (v^i, v^e, v^r)$, $w := (w^i, w^e, w^r)$ dos vectores cualquiera en $\mathcal{H}_0^1(\mathcal{B})\times\mathcal{H}_0^1(\mathcal{B})\times\mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B})$, llamaremos $\varepsilon(\alpha)$ al funcional definido por:

$$\varepsilon(v) := \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla v^i\cdot\nabla v^i + D_e\nabla v^e\cdot\nabla v^e + A_m\gamma v^r\cdot v^r\,dx + A_m\int_{\mathcal{B}} F(v^m)\,dx \tag{6.16}$$

y $g(v,w)$ a la forma bilineal dada por:

$$g(v,w) := \int_{\mathcal{B}} I_i^s w^m + (I_i^s + I_e^s)w^e\,dx - \int_{\partial\mathcal{B}}\bar{q}^e w^e\,dS$$
$$+ A_m\int_{\mathcal{B}}\lambda v^m w^m + \eta v^m w^r - \theta v^r w^m\,dx. \tag{6.17}$$

Consideremos ahora la integración temporal del sistema de ecuaciones electrofisiológicas (6.3)-(6.5) en el intervalo de tiempo $[0,T]$ usando una discretización temporal Backward-Euler semi implícita de paso de tiempo $\tau = \frac{T}{N} > 0$, es decir sea $\mathcal{P}_\tau$ la partición uniforme del intervalo de tiempo $[0,T]$ en J subintervalos

$$\mathcal{P}_\tau := \{0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{J-1} < t_J = T\},\quad t_n := n\tau, \tag{6.18}$$

con esto reemplazaremos el problema continuo (6.3)-(6.5) por una sucesión de problemas discretos para cada $n = 0,\ldots,J-1$, cuya solución $u_{n+1} := (\phi_{n+1}^i, \phi_{n+1}^e, r_{n+1})$ proviene de una aproximación de $u(t)$ para t en el intervalo $(t_n, t_{n+1}]$.

Obtenemos las siguientes ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas para el modelo de bidominio:

$$A_m C_m\frac{\phi_{n+1}^m - \phi_n^m}{\tau} - \operatorname{div}(D_i\nabla\phi_{n+1}^i) + A_m h(\phi_{n+1}^m) - I_i^s(x,t_{n+1}) = -A_m\theta r_n$$
$$A_m C_m\frac{\phi_{n+1}^m - \phi_n^m}{\tau} + \operatorname{div}(D_e\nabla\phi_{n+1}^e) + A_m h(\phi_{n+1}^m) + I_e^s(x,t_{n+1}) = -A_m\theta r_n,$$
$$C_r\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau} + \gamma r_{n+1} = \eta\phi_n^m.$$

Notar que estas ecuaciones discretas se diferencian de las expresadas en el *Capítulo 5* donde la discretización temporal fue de Backward-Euler implícita. Usando la definición dada en (6.12) tenemos:

$$
\begin{aligned}
A_m C_m \frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau} - \operatorname{div}(D_i \nabla \phi^i_{n+1}) + A_m H(\phi^m_{n+1}) - A_m \lambda \phi^m_{n+1} - I^s_i &= -A_m \theta r_n \\
A_m C_m \frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau} + \operatorname{div}(D_e \nabla \phi^e_{n+1}) + A_m H(\phi^m_{n+1}) - A_m \lambda \phi^m_{n+1} + I^s_e &= -A_m \theta r_n \\
C_r \frac{r_{n+1} - r_n}{\tau} + \gamma r_{n+1} &= \eta \phi^m_n .
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Teorema 6.1. *Sean $G^\tau_n, \mathcal{S}$ y $\mathcal{V}$ las expresiones definidas anteriormente. Supongamos, además que $u_0 := (\phi^i_0, \phi^e_0, r_0)$, $u_n \in \mathcal{S} \times \mathcal{V}$ para todo $n = 0, \ldots, J-1$ y*

$$
\frac{1}{\tau} > \frac{\lambda}{A_m C_m} \text{ y que } I^s_i, I^s_e \in \mathcal{L}^2(\mathcal{B}), \bar{q}^e \in \mathcal{L}^2(\partial \mathcal{B}_q). \tag{6.20}
$$

Entonces, la forma débil de las ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas (6.19), dadas por

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathcal{B}} \left\{ A_m C_m \frac{\phi^m - \phi^m_n}{\tau} \eta^i + D_i \nabla \phi^i \cdot \nabla \eta^i + A_m H(\phi^m) \eta^i - I^s_i \eta^i - A_m \lambda \phi^m \eta^i \right\} dx \\
&\qquad + \int_{\mathcal{B}} A_m \theta r_n \eta^i \, dx = 0 \\
&\int_{\mathcal{B}} \left\{ A_m C_m \frac{\phi^m - \phi^m_n}{\tau} \eta^e - D_e \nabla \phi^e \cdot \nabla \eta^e + A_m H(\phi^m) \eta^e + I^s_e \eta^e - A_m \lambda \phi^m \eta^e \right\} dx \\
&\qquad + \int_{\mathcal{B}} A_m \theta r_n \eta^e \, dx + \int_{\partial \mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS = 0 \\
&\int_{\mathcal{B}} \left\{ A_m C_r \frac{r - r_n}{\tau} \xi + A_m \gamma r \cdot \xi - A_m \eta \phi^m_n \xi \right\} dx = 0 \\
&\forall (\eta^i, \eta^e, \xi) \in \mathcal{H}^1_0(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}^1_0(\mathcal{B}) \times \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}),
\end{aligned}
\tag{6.21}
$$

admite una única solución u_{n+1} determinada por el principio variacional

$$
G^\tau_n[u_{n+1}] = \min_{u \in \mathcal{S} \times \mathcal{V}} G^\tau_n[u].
$$

Demostración. La forma débil de las ecuaciones electrofisiológicas semidiscretas dada por (6.21) la podemos expresar en sólo una ecuación de la forma:

$$
\begin{aligned}
A_m \int_{\mathcal{B}} & C_m \frac{\phi^m - \phi_n^m}{\tau} \eta^m - \lambda \phi^m \eta^m + C_r \frac{r - r_n}{\tau} \xi \, dx + \int_{\mathcal{B}} A_m H(\phi^m) \eta^m \, dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla \phi^i \cdot \nabla \eta^i + D_e \nabla \phi^e \cdot \nabla \eta^e + A_m \gamma r \cdot \xi \, dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s \eta^m + (I_i^s + I_e^s) \eta^e \, dx \\
&+ \int_{\partial \mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS + A_m \int_{\mathcal{B}} \theta r_n \eta^m - \eta \phi_n^m \xi \, dx = 0, \\
&\qquad \forall (\eta^i, \eta^e, \xi) \in \mathcal{H}_0^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}_0^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}).
\end{aligned}
$$

Como $-\lambda \phi^m \eta^m = -\lambda(\phi^m - \phi_n^m)\eta^m - \lambda \phi_n^m \eta^m$, obtenemos

$$
\begin{aligned}
\frac{A_m}{\tau} \int_{\mathcal{B}} & (C_m - \lambda \tau)(\phi^m - \phi_n^m) \eta^m + C_r (r - r_n) \xi \, dx + \int_{\mathcal{B}} A_m H(\phi^m) \eta^m \, dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla \phi^i \cdot \nabla \eta^i + D_e \nabla \phi^e \cdot \nabla \eta^e + A_m \gamma r \cdot \xi \, dx - \int_{\mathcal{B}} I_i^s \eta^m + (I_i^s + I_e^s) \eta^e \, dx \\
&+ \int_{\partial \mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS + A_m \int_{\mathcal{B}} \theta r_n \eta^m - \eta \phi_n^m \xi - \lambda \phi_n^m \eta^m \, dx = 0, \\
&\qquad \forall (\eta^i, \eta^e, \xi) \in \mathcal{H}_0^1(\mathcal{B}) \times \mathcal{H}_0^1(B) \times \mathcal{L}^\gamma(\mathcal{B}). \quad (6.22)
\end{aligned}
$$

Con la forma débil de las ecuaciones expresadas como en (6.22) es más sencillo verificar que resolver (6.21) equivale a minimizar $G_n^\tau[u]$. En efecto, gracias a la convexidad estricta de cada integral que define G_n y a que es Gâteaux diferenciable (la demostración de estas dos afirmaciones es similar a lo ya demostrado en bidominio para $G_n[\Phi, r]$), para encontrar la solución del problema discreto basta determinar para cada n el único punto crítico de G_n^τ. □

La solución $u_\tau(t)$ del problema discreto (6.21), (6.9)-(6.11) corresponde a la interpolación lineal de $\{u_{n+1}\}_{n=0}^{J-1}$ en la partición $\mathcal{P}_\tau$, es decir:

$$
u_\tau(t) := \left(n + 1 - \frac{t}{\tau} \right) u_n + \left(\frac{t}{\tau} - n \right) u_{n+1} \text{ si } t \in (n\tau, (n+1)\tau]. \quad (6.23)
$$

La cual queda expresada vectorialmente

$$
\begin{aligned}
u_\tau(t) &:= (u_\tau^i(t), u_\tau^e(t), r_\tau(t)) \\
&:= (1 - l(t))\, u_n + l(t) u_{n+1} \text{ si } t \in (n\tau, (n+1)\tau], \quad (6.24)
\end{aligned}
$$

donde l es una función lineal a trozos, pero discontinua, asociada a la partición $\mathcal{P}_\tau$, definida por

$$
l(t) := \frac{t}{\tau} - n \text{ si } t \in (n\tau, (n+1)\tau]. \quad (6.25)
$$

El siguiente teorema muestra que la solución $u_\tau(t)$ converge a una solución débil del problema (6.3)-(6.11) en la norma $\mathcal{L}^\infty(0,T;\mathcal{L}^2(\mathcal{B}))$ y $\mathcal{L}^2(0,T;\mathcal{H}^1(\mathcal{B}))$ y débilmente en $\mathcal{H}^1(0,T;\mathcal{L}^2(\mathcal{B}))$.(ver *Definición (2.19)*).

Notación. En adelante, abreviaremos el espacio funcional $X(\mathcal{B})$ por X y el espacio de Bochner $Y(0,T;X)$ por $Y(X)$.

Denotaremos por E el error

$$E := \max_{t\in(0,T)}\left(A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi^m(t)-\phi^m_\tau(t))^2+C_r(r(t)-r_\tau(t))^2\,dx\right)+$$
$$\int_0^T\int_{\mathcal{B}}D_i\nabla(\phi^i(t)-\phi^i_\tau(t))\cdot\nabla(\phi^i(t)-\phi^i_\tau(t))+D_e\nabla(\phi^e(t)-\phi^e_\tau(t))\cdot\nabla(\phi^e(t)-\phi^e_\tau(t))\,dx\,dt$$
$$+\int_0^T\int_{\mathcal{B}}A_m\gamma(r(t)-r_\tau(t))\cdot(r(t)-r_\tau(t))\,dx\,dt$$

Teorema 6.2 (Convergencia y estimación uniforme del error)**.** *Sea u_τ la expresión definida anteriormente, para cada $\tau>0$. Entonces u_τ converge en $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}^1)$, $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{L}^2)$ y débilmente en $\mathcal{H}^1(\mathcal{L}^2)$, cuando $\tau\to 0$, a una solución débil de (6.3)-(6.11) con la siguiente tasa de convergencia: existe $C=C(G,T)$ tal que*

$$E\le C\tau\left(\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}D_i\nabla\phi^i_0\cdot\nabla\phi^i_0+D_e\nabla\phi^e_0\cdot\phi^e_0+A_m\gamma r_0\cdot r_0\,dx+A_m\int_{\mathcal{B}}F(\phi^m_0)\,dx\right).$$

G es una constante que depende de las constantes del modelo y será definida constructivamente durante la demostración del teorema, la cual es presentada en la siguiente sección.

6.2. Convergencia y estimación uniforme del error

Demostración. (*Teorema* 6.2) Consideremos $\{u_{n+1}\}_{n=0}^{J-1}$ la solución discreta del problema (6.19) introducido en la sección anterior. Ya denotamos por u_τ la interpolación lineal de los valores discretos. Además denotaremos por $\bar{u}_\tau$ la interpolación constante a trozos definida por

$$\bar{u}_\tau(t) := u_{n+1} \text{ si } t\in(n\tau,(n+1)\tau]. \tag{6.26}$$

y de manera vectorial por

$$\bar{u}_\tau(t) := (\bar{\phi}^i_\tau(t),\bar{\phi}^e_\tau(t),\bar{r}_\tau(t)).$$

Desigualdad variacional discreta. Según lo demostrado en el *Teorema* 6.1, para cada $n = 0 \dots J-1$, u_{n+1} es solución de la ecuación (6.22), es decir

$$
\begin{aligned}
&A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)\left(\frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau}\right)\eta^m + C_r\left(\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau}\right)\xi\, dx + \int_{\mathcal{B}} A_m H(\phi^m_{n+1})\eta^m\, dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla\phi^i_{n+1} \cdot \nabla\eta^i + D_e \nabla\phi^e_{n+1} \cdot \nabla\eta^e + A_m \gamma r_{n+1} \cdot \xi\, dx - \int_{\mathcal{B}} I^s_i \eta^m + (I^s_i + I^s_e)\eta^e\, dx \\
&+ \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e\, dS + A_m \int_{\mathcal{B}} \theta r_n \eta^m - \eta\phi^m_n \xi - \lambda\phi^m_n \eta^m\, dx = 0 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \forall(\eta^i, \eta^e, \xi) \in \mathcal{H}^1_0 \times \mathcal{H}^1_0 \times \mathcal{L}^\gamma. \quad (6.27)
\end{aligned}
$$

Tomando $\eta^i = \phi^i_{n+1} - v^i$,$\eta^e = \phi^e_{n+1} - v^e$ y $\xi = r_{n+1} - v^r$ en (6.27) para algún $v := (v^i, v^e, v^r) \in \mathcal{H}^1_0 \times \mathcal{H}^1_0 \times \mathcal{L}^\gamma$ obtenemos

$$
\begin{aligned}
&A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)\left(\frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau}\right)(\phi^m_{n+1} - v^m) + C_r\left(\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau}\right)(r_{n+1} - v^r)\, dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla\phi^i_{n+1} \cdot \nabla(\phi^i_{n+1} - v^i) + D_e \nabla\phi^e_{n+1} \cdot \nabla(\phi^e_{n+1} - v^e) + A_m \gamma r_{n+1} \cdot (r_{n+1} - v^r)\, dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} A_m H(\phi^m_{n+1})(\phi^m_{n+1} - v^m)\, dx - \int_{\mathcal{B}} I^s_i(\phi^m_{n+1} - v^m) + (I^s_i + I^s_e)(\phi^e_{n+1} - v^e)\, dx \\
&+ \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot (\phi^e_{n+1} - v^e)\, dS = A_m \int_{\mathcal{B}} \lambda\phi^m_n(\phi^m_{n+1} - v^m) + \eta\phi^m_n(r_{n+1} - v^r) - \theta r_n(\phi^m_{n+1} - v^m)\, dx.
\end{aligned}
$$

Como F es convexa, satisface la siguiente propiedad

$$
F(\phi^m_{n+1}) - F(v^m) \le H(\phi^m_{n+1})(\phi^m_{n+1} - v^m). \tag{6.28}
$$

Además cualquier forma cuadrática satisface

$$
a(a-b) = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2. \tag{6.29}
$$

Por lo tanto, aplicando (6.28) y (6.29) a la ecuación antes señalada se tiene,

$$
\begin{aligned}
&A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)\left(\frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau}\right)(\phi^m_{n+1} - v^m) + C_r\left(\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau}\right)(r_{n+1} - v^r)\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla(\phi^i_{n+1} - v^i)\cdot\nabla(\phi^i_{n+1} - v^i) + D_e\nabla(\phi^e_{n+1} - v^e)\cdot\nabla(\phi^e_{n+1} - v^e)\,dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} A_m\gamma(r_{n+1} - v^r)\cdot(r_{n+1} - v^r)\,dx + A_m\int_{\mathcal{B}} F(\phi^m_{n+1})\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla\phi^i_{n+1}\cdot\nabla\phi^i_{n+1} + D_e\nabla\phi^e_{n+1}\cdot\nabla\phi^e_{n+1} + A_m\gamma r_{n+1}\cdot r_{n+1}\,dx \\
&\leq \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla v^i\cdot\nabla v^i + D_e\nabla v^e\cdot\nabla v^e + A_m\gamma v^r\cdot v^r\,dx + A_m\int_{\mathcal{B}} F(v^m)\,dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} I^s_i(\phi^m_{n+1} - v^m) + (I^s_i + I^s_e)(\phi^e_{n+1} - v^e)\,dx - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e\cdot(\phi^e_{n+1} - v^e)\,dS \\
&+ A_m\int_{\mathcal{B}} \lambda\phi^m_n(\phi^m_{n+1} - v^m) + \eta\phi^m_n(r_{n+1} - v^r) - \theta r_n(\phi^m_{n+1} - v^m)\,dx. \qquad (6.30)
\end{aligned}
$$

Utilizando las definiciones (6.16) y (6.17) en (6.30) obtenemos la desigualdad discreta con la que trabajaremos

$$
\begin{aligned}
&A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)\left(\frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau}\right)(\phi^m_{n+1} - v^m) + C_r\left(\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau}\right)(r_{n+1} - v^r)\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla(\phi^i_{n+1} - v^i)\cdot\nabla(\phi^i_{n+1} - v^i) + D_e\nabla(\phi^e_{n+1} - v^e)\cdot\nabla(\phi^e_{n+1} - v^e)\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} A_m\gamma(r_{n+1} - v^r)\cdot(r_{n+1} - v^r)\,dx + \varepsilon(u_{n+1}) \leq \varepsilon(v) + g(u_n, u_{n+1} - v).
\end{aligned}
\tag{6.31}
$$

Estimaciones de estabilidad. Existe $C = C(G,T)$ constante tal que

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{J-1}\Bigg\{\tau A_m\int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)\left(\frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau}\right)^2 + C_r\left(\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau}\right)^2 dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla(\phi^i_{n+1} - \phi^i_n)\cdot\nabla(\phi^i_{n+1} - \phi^i_n) + D_e\nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n)\cdot\nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n)\,dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} A_m\gamma(r_{n+1} - r_n)\cdot(r_{n+1} - r_n)\,dx\Bigg\} + \sup_{0\leq m\leq J-1}\varepsilon(u_{m+1}) \leq C\varepsilon(u_0). \qquad (6.32)
\end{aligned}
$$

En efecto, tomando en (6.31) $v = 0$ tenemos:

$$A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau) \left(\frac{\phi^m_{n+1} - \phi^m_n}{\tau} \right) \phi^m_{n+1} + C_r \left(\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau} \right) r_{n+1} \, dx$$
$$+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla\phi^i_{n+1} \cdot \nabla\phi^i_{n+1} + D_e \nabla\phi^e_{n+1} \cdot \nabla\phi^e_{n+1} + A_m \gamma r_{n+1} \cdot r_{n+1} \, dx + \varepsilon(u_{n+1}) \leq g(u_n, u_{n+1}). \tag{6.33}$$

Utilizando la identidad (6.29) y multiplicando por 2τ obtenemos:

$$A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_{n+1})^2 + C_r r^2_{n+1} \, dx - A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_n)^2 + C_r r^2_n \, dx$$
$$+ A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_{n+1} - \phi^m_n)^2 + C_r (r_{n+1} - r_n)^2 \, dx + 2\tau \int_{\mathcal{B}} F(\phi_{n+1})$$
$$+ 2\tau \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla\phi^i_{n+1} \cdot \nabla\phi^i_{n+1} + D_e \nabla\phi^e_{n+1} \cdot \nabla\phi^e_{n+1} + A_m \gamma r_{n+1} \cdot r_{n+1} \, dx \leq 2\tau g(u_n, u_{n+1}). \tag{6.34}$$

Consideremos ahora la identidad $g(u_n, u_{n+1}) = g(u_n, u_n) + g(u_n, u_{n+1} - u_n)$ y por (6.17)

$$g(u_n, u_n) = \int_{\mathcal{B}} I^s_i \phi^m_n + (I^s_i + I^s_e)\phi^e_n \, dx - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi^e_n \, dS + A_m \int_{\mathcal{B}} \lambda(\phi^m_n)^2 + \eta\phi^m_n r_n - \theta r_n \phi^m_n \, dx.$$

$$g(u_n, u_{n+1} - u_n) = \int_{\mathcal{B}} I^s_i (\phi^m_{n+1} - \phi^m_n) + (I^s_i + I^s_e)(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n) \, dx - \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot (\phi^e_{n+1} - \phi^e_n) \, dS$$
$$+ A_m \int_{\mathcal{B}} \lambda\phi^m_n + (\phi^m_{n+1} - \phi^m_n) + \eta\phi^m_n (r_{n+1} - r_n) - \theta r_n (\phi^m_{n+1} - \phi^m_n) \, dx.$$

Aplicando la desigualdad de Young a cada integral que define $2\tau g(u_n, u_n)$ obtenemos las siguientes cota superiores

$$2\tau A_m \int_{\mathcal{B}} \lambda(\phi^m_n)^2 \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \frac{3\tau\lambda^2}{C_m - \lambda\tau} (\phi^m_n)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \frac{C_m - \lambda\tau}{3\tau} (2\tau)^2 (\phi^m_n)^2 \, dx$$
$$2\tau A_m \int_{\mathcal{B}} \theta r_n \phi^m_n \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \frac{3\tau\theta^2}{C_m - \lambda\tau} r^2_n \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \frac{C_m - \lambda\tau}{3\tau} (2\tau)^2 (\phi^m_n)^2 \, dx$$
$$2\tau A_m \int_{\mathcal{B}} \eta\phi^m_n r_n \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \frac{\tau\eta^2}{C_r} (\phi^m_n)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \frac{C_r}{\tau} (2\tau)^2 r^2_n \, dx$$
$$2\tau \int_{\mathcal{B}} I^s_i \phi^m_n \, dx \leq \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \frac{3\tau}{A_m(C_m - \lambda\tau)} I^2_i \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \frac{A_m(C_m - \lambda\tau)}{3\tau} (2\tau)^2 (\phi^m_n)^2 \, dx.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
2\tau g(u_n,u_n) \leq (2\tau)^2\frac{A_m}{2\tau}\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_n^m)^2+C_r r_n^2\,dx \\
+\frac{A_m\tau}{2}\left(\frac{3\lambda^2}{C_m-\lambda\tau}\int_{\mathcal{B}}(\phi_n^m)^2\,dx+\frac{3\theta^2}{C_m-\lambda\tau}\int_{\mathcal{B}}r_n^2\,dx+\frac{\eta^2}{C_r}\int_{\mathcal{B}}(\phi_n^m)^2\,dx\right) \\
+\frac{3\tau}{2A_m(C_m-\lambda\tau)}\int_{\mathcal{B}}I_i^{s2}\,dx+2\tau\int_{\mathcal{B}}(I_i^s+I_e^s)\phi_n^e\,dx+2\tau\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}^e\cdot\phi_n^e\,dS
\end{aligned}$$

De forma análoga podemos acotar $2\tau g(u_n,u_{n+1}-u_n)$

$$\begin{aligned}
2\tau A_m\int_{\mathcal{B}}\lambda\phi_n^m(\phi_{n+1}^m-\phi_n^m)\,dx \leq 2\tau\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{3\tau\lambda^2}{C_m-\lambda\tau}(\phi_n^m)^2\,dx \\
+2\tau\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{C_m-\lambda\tau}{3\tau}(\phi_{n+1}^m-\phi_n^m)^2\,dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\tau A_m\int_{\mathcal{B}}\theta r_n(\phi_{n+1}^m-\phi_n^m)\,dx \leq 2\tau\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{3\tau\theta^2}{C_m-\lambda\tau}r_n^2\,dx \\
+2\tau\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{C_m-\lambda\tau}{3\tau}(\phi_{n+1}-\phi_n^m)^2\,dx
\end{aligned}$$

$$2\tau A_m\int_{\mathcal{B}}\eta\phi_n^m(r_{n+1}-r_n)\,dx \leq 2\tau\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{\tau\eta^2}{C_r}(\phi_n^m)^2\,dx+2\tau\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{C_r}{\tau}(r_{n+1}-r_n)^2\,dx$$

$$\begin{aligned}
2\tau\int_{\mathcal{B}}I_i^s(\phi_{n+1}^m-\phi_n^m)\,dx \leq 2\tau\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{3\tau}{A_m(C_m-\lambda\tau)}I_i^2\,dx \\
+2\tau\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{A_m(C_m-\lambda\tau)}{3\tau}(\phi_{n+1}^m-\phi_n^m)^2\,dx.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
2\tau g(u_n,u_{n+1}-u_n) \leq A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_{n+1}^m-\phi_n^m)^2+C_r(r_{n+1}-r_n)^2\,dx \\
+2\tau\frac{A_m\tau}{2}\left(\frac{3\lambda^2}{C_m-\lambda\tau}\int_{\mathcal{B}}(\phi_n^m)^2\,dx+\frac{3\theta^2}{C_m-\lambda\tau}\int_{\mathcal{B}}r_n^2\,dx+\frac{\eta^2}{C_r}\int_{\mathcal{B}}(\phi_n^m)^2\,dx\right) \\
+2\tau\frac{3\tau}{2A_m(C_m-\lambda\tau)}\int_{\mathcal{B}}I_i^{s2}\,dx+2\tau\int_{\mathcal{B}}(I_i^s+I_e^s)(\phi_{n+1}^e-\phi_n^e)\,dx+2\tau\int_{\partial\mathcal{B}_q}\bar{q}^e\cdot(\phi_{n+1}^e-\phi_n^e)\,dS
\end{aligned} \tag{6.35}$$

Sea G tal que

$$G^2 \geq \frac{3\lambda^2}{2(C_m-\lambda\tau)^2}+\frac{\eta^2+3\theta^2}{2C_r(C_m-\lambda\tau)}. \tag{6.36}$$

Por lo tanto,

$$
\begin{aligned}
2\tau g(u_n, u_{n+1}) &= g(u_n, u_n) + g(u_n, u_{n+1} - u_n) \\
&\leq A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_{n+1} - \phi^m_n)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2 \, dx \\
&+ \left(2\tau + \frac{\tau G^2}{2} + \tau^2 G^2\right) A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_n)^2 + C_r r_n^2 \, dx \\
&+ \frac{3\tau(2\tau+1)}{2A_m(C_m - \lambda\tau)} \int_{\mathcal{B}} I_i^{s2} \, dx + 2\tau \int_{\mathcal{B}} (I_i^s + I_e^s)\phi^e_{n+1} \, dx + 2\tau \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi^e_{n+1} \, dS
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\int_{\mathcal{B}} (I_i^s + I_e^s)\phi^e_{n+1} \, dx \leq \frac{C^e_{\mathcal{B}}}{2\mu_e} \int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2 \, dx + \frac{\mu_e}{2C^e_{\mathcal{B}}} \int_{\mathcal{B}} (\phi^e_{n+1})^2 \, dx,
$$

usando la desigualdad de Poincaré (5.39)

$$
\leq \frac{C^e_{\mathcal{B}}}{2\mu_e} \int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2 \, dx + \frac{\mu_e}{2} \int_{\mathcal{B}} \left|\nabla\phi^e_{n+1}\right|^2 \, dx,
$$

y como $\nabla\phi^e_{n+1} \cdot D_e \nabla\phi^e_{n+1} \geq \mu_e \left|\nabla\phi^e_{n+1}\right|^2$

$$
\leq \frac{C^e_{\mathcal{B}}}{2\mu_e} \int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2 \, dx + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \nabla\phi^e_{n+1} \cdot D_e \nabla\phi^e_{n+1} \, dx.
$$

De igual manera por la desigualdad de Young

$$
\int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \phi^e_{n+1} \, dS \leq \frac{C_T}{2\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2} \, dS + \frac{\mu_e}{2C_T} \int_{\partial\mathcal{B}_q} (\phi^e_{n+1})^2 \, dS
$$

y por teorema de traza (5.40)

$$
\begin{aligned}
&\leq \frac{C_T}{2\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2} \, dS + \frac{\mu_e}{2} \int_{\mathcal{B}} \left|\nabla\phi^e_{n+1}\right|^2 \, dx, \\
&\leq \frac{C_T}{2\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2} \, dS + \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} \nabla\phi^e_{n+1} \cdot D_e \nabla\phi^e_{n+1} \, dx.
\end{aligned}
$$

En consecuencia,

$$
\begin{aligned}
&2\tau g(u_n, u_{n+1}) \le A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_{n+1} - \phi^m_n)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2 \, dx \\
&+ \tau \left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right) A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_n)^2 + C_r r_n^2 \, dx + \frac{3\tau(2\tau+1)}{2A_m(C_m - \lambda\tau)} \int_{\mathcal{B}} I_i^{s2} \, dx \\
&+ 2\tau \frac{C^e_{\mathcal{B}}}{2\mu_e} \int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2 \, dx + \tau \int_{\mathcal{B}} \nabla\phi^e_{n+1} \cdot D_e \nabla\phi^e_{n+1} \, dx + 2\tau \frac{C_T}{2\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2} \, dS \\
&+ \tau \int_{\mathcal{B}} \nabla\phi^e_{n+1} \cdot D_e \nabla\phi^e_{n+1} \, dx.
\end{aligned}
$$

Reemplazando en (6.34)

$$
\begin{aligned}
&A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_{n+1})^2 + C_r r_{n+1}^2 \, dx - A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_n)^2 + C_r r_n^2 \, dx \\
&+ 2\tau \int_{\mathcal{B}} F(\phi_{n+1}) + 2\tau \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla\phi^i_{n+1} \cdot \nabla\phi^i_{n+1} + A_m \gamma r_{n+1}^2 \, dx \\
&\le \tau \left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right) A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_n)^2 + C_r r_n^2 \, dx + \frac{3\tau(2\tau+1)}{2A_m(C_m - \lambda\tau)} \int_{\mathcal{B}} I_i^{s2} \, dx \\
&+ 2\tau \frac{C^e_{\mathcal{B}}}{2\mu_e} \int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2 \, dx + 2\tau \frac{C_T}{2\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2} \, dS. \qquad (6.37)
\end{aligned}
$$

Definiendo

$$
\begin{aligned}
y_n &:= A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_n)^2 + C_r r_n^2 \, dx \text{ y} \\
B &:= \frac{3\tau(2\tau+1)}{2A_m(C_m - \lambda\tau)} \int_{\mathcal{B}} I_i^{s2} \, dx + 2\tau \frac{C^e_{\mathcal{B}}}{2\mu_e} \int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2 \, dx + 2\tau \frac{C_T}{2\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2} \, dS
\end{aligned}
$$

podemos reescribir (6.37) como la siguiente desigualdad discreta:

$$
y_{n+1} - y_n \le \tau \left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right) y_n + B \qquad (6.38)
$$

Aplicando la version discreta del lema de Gronwall (*Lema 2.20*) obtenemos

$$
\begin{aligned}
y_n &\le e^{n\tau\left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right)} y_0 + \frac{B}{\tau\left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right)} \left(e^{n\tau\left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right)} - 1\right) \\
&\le e^{T\left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right)} y_0 + \frac{B}{\tau\left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right)} \left(e^{T\left(2 + \frac{G^2}{2} + \tau G^2\right)} - 1\right),
\end{aligned}
$$

tal que $y_0 = A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi_0^m)^2 + C_r r_0^2 \, dx$.
Luego

$$\sup_{0 \le m \le J-1} y_{m+1} \le C_0 y_0 + C_1, \tag{6.39}$$

donde $C_0 := e^{T\left(2+\frac{G^2}{2}+\tau G^2\right)}$ y $C_1 := \dfrac{B}{\tau\left(2+\frac{G^2}{2}+\tau G^2\right)}(e^{T\left(2+\frac{G^2}{2}+\tau G^2\right)} - 1)$.
Ahora si reemplazamos $v = u_n$ en (6.31) nos queda:

$$\begin{aligned}
&\frac{A_m}{\tau}\int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi_{n+1}^m - \phi_n^m)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2 \, dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\phi_{n+1}^i - \phi_n^i) \cdot \nabla(\phi_{n+1}^i - \phi_n^i) + D_e \nabla(\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \cdot \nabla(\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \, dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} A_m \gamma (r_{n+1} - r_n) \cdot (r_{n+1} - r_n) \, dx + \varepsilon(u_{n+1}) \le \varepsilon(u_n) + g(u_n, u_{n+1} - u_n)
\end{aligned}$$

y sumando desde $n = 1$ a $m \le J - 1$

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{m} \Bigg\{ \frac{A_m}{\tau}\int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi_{n+1}^m - \phi_n^m)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2 \, dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\phi_{n+1}^i - \phi_n^i) \cdot \nabla(\phi_{n+1}^i - \phi_n^i) + D_e \nabla(\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \cdot \nabla(\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \, dx \\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} A_m \gamma (r_{n+1} - r_n) \cdot (r_{n+1} - r_n) \, dx \Bigg\} + \varepsilon(u_{m+1}) \le \varepsilon(u_0) + \sum_{n=0}^{m} g(u_n, u_{n+1} - u_n).
\end{aligned} \tag{6.40}$$

Por lo ya hecho en (6.35) y la definición de G dada en (6.36) tenemos

$$\begin{aligned}
g(u_n, u_{n+1} - u_n) &\le \frac{A_m}{2\tau}\int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi_{n+1}^m - \phi_n^m)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2 \, dx \\
&+ \frac{A_m \tau}{2} G^2 \left\{ (C_m - \lambda\tau)\int_{\mathcal{B}} (\phi_n^m)^2 \, dx + C_r \int_{\mathcal{B}} r_n^2 \, dx \right\} + \frac{3\tau}{2A_m(C_m - \lambda\tau)}\int_{\mathcal{B}} I_i^{s2} \, dx \\
&+ \int_{\mathcal{B}} (I_i^s + I_e^s)(\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \, dx + \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot (\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \, dS
\end{aligned} \tag{6.41}$$

Además, al igual que anteriormente, aplicando la desigualdad de Young, la desigualdad de Poincaré (5.39) y el teorema de trazas (5.40)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{B}} (I_i^s + I_e^s)(\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \, dx &\le \frac{2C_{\mathcal{B}}^e}{\mu_e}\int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2 \, dx \\
&+ \frac{1}{8}\int_{\mathcal{B}} \nabla(\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \cdot D_e \nabla(\phi_{n+1}^e - \phi_n^e) \, dx
\end{aligned} \tag{6.42}$$

$$\int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot (\phi^e_{n+1} - \phi^e_n)\, dS \leq \frac{2C_T}{\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2}\, dS + \frac{1}{8} \int_{\mathcal{B}} \nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n) \cdot D_e \nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^2_n)\, dx. \quad (6.43)$$

Con esto acotamos (6.40) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{m} \Bigg\{ \frac{A_m}{\tau} \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)\, (\phi^m_{n+1} - \phi^m_n)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2\, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\phi^i_{n+1} - \phi^i_n) \cdot \nabla(\phi^i_{n+1} - \phi^i_n) + D_e \nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n) \cdot \nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n)\, dx \\
&+ \frac{1}{2} \int_{\mathcal{B}} A_m \gamma(r_{n+1} - r_n) \cdot (r_{n+1} - r_n)\, dx \Bigg\} + \varepsilon(u_{m+1}) \\
&\leq \varepsilon(u_0) + \sum_{n=0}^{m} \frac{A_m}{2\tau} \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m_{n+1} - \phi^m_n)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2\, dx \\
&+ \frac{G^2\tau}{2} \sum_{n=0}^{m} y_n + \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{m} \int_{\mathcal{B}} \nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n) \cdot D_e \nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n)\, dx \\
&+ \sum_{n=0}^{m} \Bigg\{ \frac{3\tau}{2A_m(C_m - \lambda\tau)} \int_{\mathcal{B}} I^{s2}_i\, dx + \frac{2C^e_{\mathcal{B}}}{\mu_e} \int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2\, dx + \frac{2C_T}{\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2}\, dS \Bigg\}
\end{aligned} \quad (6.44)$$

entonces tomando $m = J - 1$ obtenemos

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{J-1} \Bigg\{ \frac{A_m}{2\tau} \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)\, (\phi^m_{n+1} - \phi^m_n)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2\, dx \\
&+ \frac{1}{4} \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\phi^i_{n+1} - \phi^i_n) \cdot \nabla(\phi^i_{n+1} - \phi^i_n) + D_e \nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n) \cdot \nabla(\phi^e_{n+1} - \phi^e_n)\, dx \\
&+ \frac{1}{4} \int_{\mathcal{B}} A_m \gamma(r_{n+1} - r_n) \cdot (r_{n+1} - r_n)\, dx \Bigg\} + \varepsilon(u_J) \leq \varepsilon(u_0) + \frac{G^2\tau}{2} \sum_{n=0}^{J-1} y_n + D,
\end{aligned}$$

con

$$D := \frac{3T}{2A_m(C_m - \lambda\tau)} \int_{\mathcal{B}} I^{s2}_i\, dx + \frac{2C^e_{\mathcal{B}} J}{\mu_e} \int_{\mathcal{B}} (I_i + I_e)^2\, dx + \frac{2C_T J}{\mu_e} \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^{e2}\, dS.$$

Luego, por una parte

$$\sum_{n=0}^{J-1}\left\{\frac{A_m}{\tau}\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)\,(\phi^m_{n+1}-\phi^m_n)^2+C_r(r_{n+1}-r_n)^2\,dx\right.$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}D_i\nabla(\phi^i_{n+1}-\phi^i_n)\cdot\nabla(\phi^i_{n+1}-\phi^i_n)+D_e\nabla(\phi^e_{n+1}-\phi^e_n)\cdot\nabla(\phi^e_{n+1}-\phi^e_n)\,dx$$
$$\left.+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}A_m\gamma(r_{n+1}-r_n)\cdot(r_{n+1}-r_n)\,dx\right\}\leq 2\varepsilon(u_0)+G^2\tau\sum_{n=0}^{J-1}y_n+2D,$$

ocupando (6.39)

$$\leq 2\varepsilon(u_0)+G^2T(C_0y_0+C_1)+2D. \tag{6.45}$$

Y por otra parte

$$\varepsilon(u_{m+1})\leq\varepsilon(u_0)+\frac{G^2\tau}{2}\sum_{n=0}^{m}y_n+D,\ \text{para todo } m \text{ entre } 0 \text{ y } J-1,$$

entonces por (6.39),

$$\sup_{0\leq m\leq J-1}\varepsilon(u_{m+1})\leq\varepsilon(u_0)+\frac{G^2T}{2}(C_0y_0+C_1)+D. \tag{6.46}$$

Por lo tanto concluimos (6.32).

Una versión continua de la desigualdad variacional discreta. La interpolación lineal a trozos satisface

$$A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)\frac{d\phi^m_\tau}{dt}(t)(\phi^m_\tau(t)-v^m)+C_r\frac{dr_\tau}{dt}(t)(r_\tau(t)-v^r)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}D_i\nabla(\bar{\phi}^i_\tau(t)-v^i)\cdot\nabla(\bar{\phi}^i_\tau(t)-v^i)+D_e\nabla(\bar{\phi}^e_\tau(t)-v^e)\cdot\nabla(\bar{\phi}^e_\tau(t)-v^e)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}A_m\gamma(\bar{r}_\tau(t)-v^r)\cdot(\bar{r}_\tau(t)-v^r)\,dx+\varepsilon(u_\tau(t))$$
$$\leq\varepsilon(v)+g(u_\tau(t)-\tau l(t)\frac{du_\tau}{dt}(t),u_\tau(t)-v)+\mathcal{R}_\tau(t), \tag{6.47}$$

donde

$$\mathcal{R}_\tau(t):=(1-l)\left(\varepsilon(u_n)-\varepsilon(u_{n+1})+g(u_n,u_{n+1}-u_n)\right),$$

y

$$\int_0^T \left\{ A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau) \frac{du_\tau}{dt}(t)^2 + C_r \frac{dr_\tau}{dt}(t)^2 \, dx \right.$$
$$+ \frac{1}{2\tau} \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\phi_\tau^i(t) - \bar{\phi}_\tau^i(t)) \cdot \nabla(\phi_\tau^i(t) - \bar{\phi}_\tau^i(t))$$
$$+ \frac{1}{2\tau} \int_{\mathcal{B}} D_e \nabla(\phi_\tau^e(t) - \bar{\phi}_\tau^e(t)) \cdot \nabla(\phi_\tau^e(t) - \bar{\phi}_\tau^e(t)) \, dx$$
$$\left. + \frac{1}{2\tau} \int_{\mathcal{B}} A_m \gamma(r_\tau(t) - \bar{r}_{\tau(t)}) \cdot (r_\tau(t) - \bar{r}_{\tau(t)}) \, dx \right\} dt \leq C\varepsilon(u_0). \quad (6.48)$$

En efecto, para verificar (6.47) escribimos el valor discreto de todos los términos para $t \in (t_n, t_{n+1})$, observar que

$$\frac{du_\tau}{dt}(t) = \frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} \text{ para } t \in (t_n, t_{n+1}) \quad (6.49)$$

y

$$u_\tau(t) - v = (1-l)u_n + lu_{n+1} - v = (u_{n+1} - v) - (1-l)(u_{n+1} - u_n).$$

Entonces tenemos

$$A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau) \frac{d\phi_\tau^m}{dt}(t)(\phi_\tau^m(t) - v^m) + C_r \frac{dr_\tau}{dt}(t)(r_\tau(t) - v^r) \, dx$$
$$= A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau) \left(\frac{\phi_{n+1}^m - \phi_n^m}{\tau} \right) (\phi_{n+1}^m - v^m) + C_r \left(\frac{r_{n+1} - r_n}{\tau} \right) (r_{n+1} - v^r) \, dx$$
$$- \frac{(1-l)}{\tau} A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi_{n+1}^m - \phi_n^m)^2 + C_r(r_{n+1} - r_n)^2 \, dx \quad (6.50)$$

y debido a la convexidad de cada término que define al error ε (6.16)

$$\begin{aligned} \varepsilon(u_\tau) &= \varepsilon((1-l)u_n + lu_{n+1}) \\ &\leq (1-l)\varepsilon(u_n) + l\varepsilon(u_{n+1}) \\ &= \varepsilon(u_{n+1}) + (1-l)(\varepsilon(u_n) - \varepsilon(u_{n+1})). \end{aligned} \quad (6.51)$$

Además

$$\begin{aligned} & g\left(u_\tau(t) - \tau l \frac{du_\tau}{dt}, u_\tau - v \right) \\ &= g\left((1-l)u_n + lu_{n+1} - \tau l \left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} \right), (1-l)u_n + lu_{n+1} - v \right) \\ &= g(u_n, (u_{n+1} - v) - (1-l)(u_{n+1} - u_n)) \\ &= g(u_n, (u_{n+1} - v)) - (1-l)g(u_n, u_{n+1} - u_n). \end{aligned} \quad (6.52)$$

Usando (6.31), (6.50), (6.51) y (6.52)

$$A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)\frac{d\phi_\tau^m}{dt}(\phi_\tau^m-v^m)+C_r\frac{dr_\tau}{dt}(r_\tau-v^r)\,dx+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}A_m\gamma(\bar{r}_\tau-v^r)\cdot(\bar{r}_\tau-v^r)\,dx$$
$$+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}D_i\nabla(\bar{\phi}_\tau^i-v^i)\cdot\nabla(\bar{\phi}_\tau^i-v^i)+D_e\nabla(\bar{\phi}_\tau^e-v^e)\cdot\nabla(\bar{\phi}_\tau^e-v^e)\,dx+\varepsilon(u_\tau)$$
$$\le\varepsilon(v)+g(u_\tau-\tau l\frac{du_\tau}{dt},u_\tau-v)-\frac{(1-l)}{\tau}A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_{n+1}^m-\phi_n^m)^2+C_r(r_{n+1}-r_n)^2\,dx,$$

lo cual prueba (6.47). Además (6.48) se sigue directamente de (6.32) y (6.49).

Una estimación para el resto.

$$\int_0^T|\mathcal{R}_\tau(t)|\le C_2\varepsilon(u_0)\tau. \tag{6.53}$$

Primero que todo, como u_{n+1} minimiza G_n^τ tenemos

$$G_n^\tau[u_{n+1}]\le G_n^\tau[u_n],$$

en vista de (6.15),(6.16) y (6.17) lo anterior equivale a

$$\frac{A_m}{2\tau}\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_{n+1}^m-\phi_n^m)^2+C_r(r_{n+1}-r_n)^2\,dx+\varepsilon(u_{n+1})-g(u_n,u_{n+1})$$
$$\le\varepsilon(u_n)-g(u_n,u_n)$$

luego

$$\varepsilon(u_{n+1})-g(u_n,u_{n+1})\le\varepsilon(u_n)-g(u_n,u_n)$$

por lo tanto $\mathcal{R}_\tau(t)\ge 0$. Además

$$\begin{aligned}\int_0^T\mathcal{R}_\tau(t)\,dt&=\int_0^T(1-l)\left(\varepsilon(u_n)-\varepsilon(u_{n+1})+g(u_n,u_{n+1}-u_n)\right)\,dt\\&=\frac{\tau}{2}\sum_{n=0}^{J-1}\left(\varepsilon(u_n)-\varepsilon(u_{n+1})+g(u_n,u_{n+1}-u_n)\right)\\&=\frac{\tau}{2}\left(\varepsilon(u_0)-\varepsilon(u_J)+\sum_{n=0}^{J-1}g(u_n,u_{n+1}-u_n)\right),\end{aligned}$$

usando (6.41), (6.42), (6.43) y (6.45))

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=0}^{J-1} g(u_n, u_{n+1}-u_n)\\
&\leq \sum_{n=0}^{J-1} \frac{A_m}{2\tau}\int_{\mathcal{B}} (C_m-\lambda\tau)(\phi^m_{n+1}-\phi^m_n)^2 + C_r(r_{n+1}-r_n)^2\,dx\\
&+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{J-1}\int_{\mathcal{B}} \nabla(\phi^e_{n+1}-\phi^e_n)\cdot D_e\nabla(\phi^e_{n+1}-\phi^e_n)\,dx + \frac{G^2\tau}{2}\sum_{n=0}^{m} y_n + D\\
&\leq \varepsilon(u_0) + \frac{G^2T}{2}(C_0y_0+C_1) + D + \frac{G^2T}{2}(C_0y_0+C_1)+D,
\end{aligned}
$$

entonces

$$
\begin{aligned}
\int_0^T \mathcal{R}_\tau(t)\,dt &\leq \frac{\tau}{2}\big(\varepsilon(u_0)+\varepsilon(u_0)+G^2T(C_0y_0+C_1)+2D\big)\\
&\leq C_2\varepsilon(u_0)\tau.
\end{aligned}
$$

Una estimación tipo Gronwall para el error. Si u_ρ, $\rho>0$, es la solución discreta asociada con la partición $\mathcal{P}_\rho$, tenemos

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}\left(A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi^m_\tau(t)-\phi^m_\rho(t))^2 + C_r(r_\tau(t)-r_\rho(t))^2\,dx\right)\\
&\quad+\int_0^T\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla(\phi^i_\tau-\phi^i_\rho)\cdot\nabla(\phi^i_\tau-\phi^i_\rho) + D_e\nabla(\phi^e_\tau-\phi^e_\rho)\cdot\nabla(\phi^e_\tau-\phi^e_\rho)\,dx\,dt\\
&\qquad+\int_0^T\int_{\mathcal{B}} A_m\gamma(r_\tau-r_\rho)\cdot(r_\tau-r_\rho)\,dx\,dt \leq C(\tau+\rho)\varepsilon(u_0). \quad (6.54)
\end{aligned}
$$

Sean $l_\tau,\ l_\rho$ las funciones de interpolación correspondiente a $\mathcal{P}_\tau,\ \mathcal{P}_\rho$. Eligiendo $v := u_\rho(t)$ en (6.47) y $v := u_\tau(t)$ en la desigualdad análoga escrita para u_ρ, obtenemos:

$$
\begin{aligned}
&A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)\frac{d\phi^m_\tau}{dt}(\phi^m_\tau-\phi^m_\rho) + C_r\frac{dr_\tau}{dt}(r_\tau-r_\rho)\,dx +\\
&\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla(\bar\phi^i_\tau-\phi^i_\rho)\cdot\nabla(\bar\phi^i_\tau-\phi^i_\rho)+D_e\nabla(\bar\phi^e_\tau-\phi^e_\rho)\cdot\nabla(\bar\phi^e_\tau-\phi^e_\rho)+A_m\gamma(\bar r_\tau-r_\rho)\cdot(\bar r_\tau-r_\rho)\,dx\\
&\qquad+\varepsilon(u_\tau)\leq\varepsilon(u_\rho)+g\Big(u_\tau-\tau l_\tau\frac{du_\tau}{dt}, u_\tau-u_\rho\Big)+\mathcal{R}_\tau, \quad (6.55)
\end{aligned}
$$

y

$$A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\rho)\frac{d\phi_\rho^m}{dt}(\phi_\rho^m - \phi_\tau^m) + C_r \frac{dr_\rho}{dt}(r_\rho - r_\tau)\, dx +$$
$$\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\bar{\phi}_\rho^i - \phi_\tau^i)\cdot\nabla(\bar{\phi}_\rho^i - \phi_\tau^i) + D_e\nabla(\bar{\phi}_\rho^e - \phi_\tau^e)\cdot\nabla(\bar{\phi}_\rho^e - \phi_\tau^e) + A_m\gamma(\bar{r}_\rho - r_\tau)\cdot(\bar{r}_\rho - r_\tau)\, dx$$
$$+ \varepsilon(u_\rho) \leq \varepsilon(u_\tau) + g(u_\rho - \rho l_\rho \frac{du_\rho}{dt}, u_\rho - u_\tau) + \mathcal{R}_\rho, \quad (6.56)$$

Sumando (6.55) con (6.56) obtenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi_\tau^m - \phi_\rho^m)^2 + C_r(r_\tau - r_\rho)^2\, dx\right)\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla(\bar{\phi}_\tau^i - \phi_\rho^i)\cdot\nabla(\bar{\phi}_\tau^i - \phi_\rho^i) + D_e\nabla(\bar{\phi}_\tau^e - \phi_\rho^e)\cdot\nabla(\bar{\phi}_\tau^e - \phi_\rho^e)\, dx\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla(\bar{\phi}_\rho^i - \phi_\tau^i)\cdot\nabla(\bar{\phi}_\rho^i - \phi_\tau^i) + D_e\nabla(\bar{\phi}_\rho^e - \phi_\tau^e)\cdot\nabla(\bar{\phi}_\rho^e - \phi_\tau^e)\, dx\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} A_m\gamma(\bar{r}_\tau - r_\rho)\cdot(\bar{r}_\tau - r_\rho) + A_m\gamma(\bar{r}_\rho - r_\tau)\cdot(\bar{r}_\rho - r_\tau)\, dx\\
&\leq 2g(u_\tau - u_\rho, u_\tau - u_\rho) - 2g(\tau l_\tau\frac{du_\tau}{dt}, u_\tau - u_\rho) + 2g(\rho l_\rho \frac{du_\rho}{dt}, u_\tau - u_\rho)\\
&+ 2\mathcal{R}_\tau + 2\mathcal{R}_\rho + A_m\lambda(\tau - \rho)\int_{\mathcal{B}} \frac{d\phi_\rho^m}{dt}(\phi_\tau^m - \phi_\rho^m)\, dx. \qquad (6.57)
\end{aligned}$$

Un sencillo cálculo muestra que

$$\begin{aligned}
(\alpha - \beta)^2 + (\gamma - \delta)^2 &= (\delta - \beta)^2 + (\alpha - \gamma)^2 + 2(\delta - \alpha)(\beta - \gamma)\\
&\geq (\delta - \beta)^2.
\end{aligned}$$

Aplicando esta desigualdad a (6.57) obtenemos,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi_\tau^m - \phi_\rho^m)^2 + C_r(r_\tau - r_\rho)^2\, dx\right)\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} D_i\nabla(\phi_\tau^i - \phi_\rho^i)\cdot\nabla(\phi_\tau^i - \phi_\rho^i) + D_e\nabla(\phi_\tau^e - \phi_\rho^e)\cdot\nabla(\phi_\tau^e - \phi_\rho^e)\, dx\\
&+ \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}} A_m\gamma(r_\tau - r_\rho)\cdot(r_\tau - r_\rho)\, dx\\
&\leq 2g(u_\tau - u_\rho, u_\tau - u_\rho) - 2g(\tau l_\tau \frac{du_\tau}{dt}, u_\tau - u_\rho) + 2g(\rho l_\rho\frac{du_\rho}{dt}, u_\tau - u_\rho) + 2\mathcal{R}_\tau + 2\mathcal{R}_\rho\\
&+ A_m\lambda(\tau - \rho)\int_{\mathcal{B}} \frac{d\phi_\rho^m}{dt}(\phi_\tau^m - \phi_\rho^m)\, dx. \qquad (6.58)
\end{aligned}$$

Replicando el argumento realizado para obtener la desigualdad variacional discreta acotaremos la desigualdad antes señalada. Según la definición dada para g en (6.17) y aplicando la desigualdad de Young obtenemos:

$$2g(u_\tau-u_\rho,u_\tau-u_\rho)=2\int_{\mathcal{B}} I_i^s(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)+(I_i^s+I_e^s)(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx-2\int_{\partial\mathcal{B}}\bar{q}^e(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dS$$
$$+2A_m\int_{\mathcal{B}}\lambda(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)+\eta(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)(r_\tau-r_\rho)-\theta(r_\tau-r_\rho)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)\,dx.$$

Acotando cada parte se tiene:

$$\begin{aligned}
2A_m\int_{\mathcal{B}}\lambda(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)\,dx &\le \frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{12\lambda^2}{C_m-\lambda\tau}(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2\,dx\\
&\quad+\frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{C_m-\lambda\tau}{3}(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2\,dx\\
2A_m\int_{\mathcal{B}}\theta(r_\tau-r_\rho)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)\,dx &\le \frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{12\theta^2}{C_m-\lambda\tau}(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\\
&\quad+\frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{C_m-\lambda\tau}{3}(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2\,dx\\
2A_m\int_{\mathcal{B}}\eta(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)(r_\tau-r_\rho)\,dx &\le \frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{4\eta^2}{C_r}(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2\,dx\\
&\quad+\frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\\
2A_m\int_{\mathcal{B}}I_i^s(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)\,dx &\le \frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{12}{A_m(C_m-\lambda\tau)}I_i^{s2}\,dx\\
&\quad+\frac{1}{2}\int_{\mathcal{B}}\frac{A_m(C_m-\lambda\tau)}{3}(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2\,dx\\
2\int_{\mathcal{B}}(I_i^s+I_e^s)(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx &\le \frac{8C_{\mathcal{B}}^e}{\mu_e}\int_{\mathcal{B}}(I_i^s+I_e^s)^2\,dx\\
&\quad+\frac{1}{8}\int_{\mathcal{B}}\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\cdot D_e\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx\\
2\int_{\partial\mathcal{B}}\bar{q}^e(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dS &\le \frac{8C_2}{\mu_e}\int_{\partial\mathcal{B}}\bar{q}^{e2}\,dS+\frac{1}{8}\int_{\mathcal{B}}\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\cdot D_e\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx,
\end{aligned}$$

luego en vista de la definición de G

$$\begin{aligned}
2g(u_\tau-u_\rho,u_\tau-u_\rho)&\le\frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2+C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\\
&\quad+2A_mG^2\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2+C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\\
&\quad+\frac{1}{4}\int_{\mathcal{B}}\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\cdot D_e\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx+D',
\end{aligned}\tag{6.59}$$

donde

$$D' := 4\left\{\frac{3}{2A_m(C_m-\lambda\tau)}\int_{\mathcal{B}} I_i^{s2}\,dx + \frac{2C_2}{\mu_e}\int_{\partial\mathcal{B}} \bar{q}^{e2}\,dS + \frac{2C_{\mathcal{B}}^e}{\mu_e}\int_{\mathcal{B}}(I_i^s+I_e^s)^2\,dx\right\},$$

Realizando el mismo procedimiento obtenemos:

$$\begin{aligned}2g(\tau l_\tau\frac{du_\tau}{dt}, u_\tau-u_\rho) \le{}& \frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2 + C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\\ &+ 2A_mG^2\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)\left(\tau l_\tau\frac{d\phi_\tau^m}{dt}\right)^2 + C_r\left(\tau l_\tau\frac{dr_\tau}{dt}\right)^2\,dx\\ &+\frac{1}{4}\int_{\mathcal{B}}\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\cdot D_e\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx + D' \end{aligned}\tag{6.60}$$

y

$$\begin{aligned}2g(\rho l_\rho\frac{du_\rho}{dt}, u_\tau-u_\rho) \le{}& \frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2 + C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\\ &+ 2A_mG^2\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)\left(\rho l_\rho\frac{d\phi_\rho^m}{dt}\right)^2 + C_r\left(\rho l_\rho\frac{dr_\rho}{dt}\right)^2\,dx\\ &+\frac{1}{4}\int_{\mathcal{B}}\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\cdot D_e\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx + D'. \end{aligned}\tag{6.61}$$

Además

$$\begin{aligned}&A_m\lambda(\tau-\rho)\int_{\mathcal{B}}\frac{d\phi_\rho^m}{dt}(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)\,dx\\ &\le \frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}\lambda^2(\tau-\rho)^2(C_m-\lambda\tau)\frac{d\phi_\rho^m}{dt}^2\,dx + \frac{A_m}{2}\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2\,dx.\end{aligned}\tag{6.62}$$

Sustituyendo (6.59)-(6.62) en (6.58) nos queda

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left(A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2 + C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\right)\\ &+\frac{1}{4}\int_{\mathcal{B}}D_i\nabla(\phi_\tau^i-\phi_\rho^i)\cdot\nabla(\phi_\tau^i-\phi_\rho^i) + D_e\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\cdot\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx\\ &+\frac{1}{4}\int_{\mathcal{B}}A_m\gamma(r_\tau-r_\rho)\cdot(r_\tau-r_\rho)\,dx\\ &\le 2(1+G^2)A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2 + C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\\ &+2G^2\tau^2A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)\frac{d\phi_\tau^m}{dt}^2 + C_r\frac{dr_\tau}{dt}^2\,dx + 3D' + 2\mathcal{R}_\tau + 2\mathcal{R}_\rho\\ &+\left(2G^2\rho^2+\frac{\lambda^2\tau^2}{2}-\lambda^2\tau\rho+\frac{\lambda^2\rho^2}{2}\right)A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)\frac{d\phi_\rho^m}{dt}^2 + C_r\frac{dr_\rho}{dt}^2\,dx.\end{aligned}$$

Por una parte:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left(A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2+C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\right)\\
&-2(1+G^2)A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m-\phi_\rho^m)^2+C_r(r_\tau-r_\rho)^2\,dx\\
&\leq 2G^2\tau^2A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau){\frac{d\phi_\tau^m}{dt}}^2+C_r{\frac{dr_\tau}{dt}}^2\,dx+3D'+2\mathcal{R}_\tau+2\mathcal{R}_\rho\\
&+\left(2G^2\rho^2+\frac{\lambda^2\tau^2}{2}-\lambda^2\tau\rho+\frac{\lambda^2\rho^2}{2}\right)A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau){\frac{d\phi_\rho^m}{dt}}^2+C_r{\frac{dr_\rho}{dt}}^2\,dx.
\end{aligned}
$$

Aplicando el lema de Gronwall, (6.48) y (6.53)

$$
\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,T]}\left(A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau)(\phi_\tau^m(t)-\phi_\rho^m(t))^2+C_r(r_\tau(t)-r_\rho(t))^2\,dx\right)\\
&\leq e^{2(1+G^2)T}\int_0^T\left\{2G^2\tau^2A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau){\frac{d\phi_\tau^m}{dt}}^2+C_r{\frac{dr_\tau}{dt}}^2\,dx+3D'+2\mathcal{R}_\tau+2\mathcal{R}_\rho\right.\\
&\left.+\left(2G^2\rho^2+\frac{\lambda^2\tau^2}{2}-\lambda^2\tau\rho+\frac{\lambda^2\rho^2}{2}\right)A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau){\frac{d\phi_\rho^m}{dt}}^2+C_r{\frac{dr_\rho}{dt}}^2\,dx\,dt\right\}\\
&\leq C(\tau+\rho)\varepsilon(u_0).
\end{aligned}
\tag{6.63}
$$

Por otra parte:

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{4}\int_{\mathcal{B}}D_i\nabla(\phi_\tau^i-\phi_\rho^i)\cdot\nabla(\phi_\tau^i-\phi_\rho^i)+D_e\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\cdot\nabla(\phi_\tau^e-\phi_\rho^e)\,dx\\
&+\frac{1}{4}\int_{\mathcal{B}}A_m\gamma(r_\tau-r_\rho)\cdot(r_\tau-r_\rho)\,dx\\
&\leq 2G^2\tau^2A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau){\frac{d\phi_\tau^m}{dt}}^2+C_r{\frac{dr_\tau}{dt}}^2\,dx+3D'+2\mathcal{R}_\tau+2\mathcal{R}_\rho\\
&+\left(2G^2\rho^2+\frac{\lambda^2\tau^2}{2}-\lambda^2\tau\rho+\frac{\lambda^2\rho^2}{2}\right)A_m\int_{\mathcal{B}}(C_m-\lambda\tau){\frac{d\phi_\rho^m}{dt}}^2+C_r{\frac{dr_\rho}{dt}}^2\,dx,
\end{aligned}
$$

integrando en $t \in [0, T]$ y aplicando (6.48) y (6.53)

$$\frac{1}{4}\int_0^T \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\phi_\tau^i - \phi_\rho^i) \cdot \nabla(\phi_\tau^i - \phi_\rho^i) + D_e \nabla(\phi_\tau^e - \phi_\rho^e) \cdot \nabla(\phi_\tau^e - \phi_\rho^e)\, dx\, dt$$
$$+ \frac{1}{4}\int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \gamma (r_\tau - r_\rho) \cdot (r_\tau - r_\rho)\, dx\, dt$$
$$\leq \int_0^T \Bigg\{ 2G^2\tau^2 A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau) \frac{d\phi_\tau^m}{dt}^{2} + C_r \frac{dr_\tau}{dt}^{2}\, dx + 3D' + 2\mathcal{R}_\tau + 2\mathcal{R}_\rho$$
$$+ \left(2G^2\rho^2 + \frac{\lambda^2\tau^2}{2} - \lambda^2\tau\rho + \frac{\lambda^2\rho^2}{2} \right) A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau) \frac{d\phi_\rho^m}{dt}^{2} + C_r \frac{dr_\rho}{dt}^{2}\, dx \Bigg\}\, dt$$
$$\leq C(\tau + \rho)\varepsilon(u_0). \tag{6.64}$$

Por lo tanto de (6.63) y (6.64) concluimos (6.54).

Sea ahora $\{\tau_j\}$ cualquier sucesión que tiende a cero. (6.45) nos muestra que la correspondiente sucesión de soluciones u_{τ_j} está acotada en $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}^1)$ y $\mathcal{H}^1(\mathcal{L}^2)$. Por lo tanto podemos extraer una subsucesión que converge débilmente en estos espacios (ver p.ej. [4]). Pasando al límite en (6.54) concluimos que dicho límite no depende de la sucesión $\{\tau_j\}$ considerada ni de la subsucesión extraída, es decir, u_τ converge débilmente a una función u es $\mathcal{S} \times \mathcal{V}$ en $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}^1)$ y $\mathcal{H}^1(\mathcal{L}^2)$ cuando $\tau \to 0$.

Tomando ahora el límite cuando $\rho \to 0$ en (6.54) obtenemos la estimación

$$\sup_{t\in[0,T]} \left(A_m \int_{\mathcal{B}} (C_m - \lambda\tau)(\phi^m(t) - \phi_\tau^m(t))^2 + C_r (r(t) - r_\tau(t))^2\, dx \right)$$
$$\int_0^T \int_{\mathcal{B}} D_i \nabla(\phi^i - \phi_\tau^i) \cdot \nabla(\phi^i - \phi_\tau^i) + \int_0^T \int_{\mathcal{B}} D_e \nabla(\phi^e - \phi_\tau^e) \cdot \nabla(\phi^e - \phi_\tau^e)\, dx\, dt$$
$$+ \int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \gamma (r - r_\tau) \cdot (r - r_\tau)\, dx\, dt \leq C\tau\varepsilon(u_0).$$

En particular, vemos que $u_\tau \to u$ en la topología fuerte de $\mathcal{L}^2(\mathcal{H}^1)$ y $\mathcal{L}^\infty(\mathcal{L}^2)$. Reescribiendo (6.21) como

$$\int_{\mathcal{B}} A_m C_m \frac{d\phi_\tau^m}{dt} \eta^i + D_i \nabla \bar{\phi}_\tau^i \cdot \nabla \eta^i + A_m H(\bar{\phi}_\tau^m)\eta^i - I_i^s \eta^i - A_m \lambda \bar{\phi}_\tau^m \eta^i + A_m \theta r_n \eta^i\, dx = 0$$
$$\int_{\mathcal{B}} A_m C_m \frac{d\phi_\tau^m}{dt} \eta^e - D_e \nabla \bar{\phi}_\tau^e \cdot \nabla \eta^e + A_m H(\bar{\phi}_\tau^m)\eta^e + I_e^s \eta^e - A_m \lambda \bar{\phi}_\tau^m \eta^e + A_m \theta r_n \eta^e\, dx$$
$$+ \int_{\partial\mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e\, dS = 0$$
$$\int_{\mathcal{B}} A_m C_r \frac{dr_\tau}{dt} \xi + A_m \gamma \bar{r}_\tau \cdot \xi - A_m \eta \phi_n^m \xi\, dx = 0 \quad \forall (\eta^i, \eta^e, \xi) \in \mathcal{H}_0^1 \times \mathcal{H}_0^1 \times \mathcal{L}^\gamma,$$

e integrando en el tiempo

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m H(\bar{\phi}_\tau^m)\eta^i - A_m C_m \phi_\tau^m \frac{d\eta^i}{dt} + D_i \nabla \bar{\phi}_\tau^i \cdot \nabla \eta^i - I_i^s \eta^i - A_m \lambda \bar{\phi}_\tau^m \eta^i \, dx \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \theta r_n \eta^i \, dx \, dt = 0 \\
&\int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m H(\bar{\phi}_\tau^m)\eta^e - A_m C_m \phi_\tau^m \frac{d\eta^e}{dt} - D_e \nabla \bar{\phi}_\tau^e \cdot \nabla \eta^e + I_e^s \eta^e - A_m \lambda \bar{\phi}_\tau^m \eta^e \, dx \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \theta r_n \eta^e \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\partial \mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS \, dt = 0 \\
&\int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \gamma \bar{r}_\tau \cdot \xi - A_m C_r r_\tau \frac{d\xi}{dt} - A_m \eta \phi_n^m \xi \, dx = 0 \\
&\forall (\eta^i, \eta^e, \xi) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_0^1) \cap \mathcal{H}^1(\mathcal{L}^2) \times \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_0^1) \cap \mathcal{H}^1(\mathcal{L}^2) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{L}^\gamma),
\end{aligned}
$$

luego tomando el límite $\tau \to 0$ vemos que

$$
\begin{aligned}
&\int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m H(\phi^m)\eta^i - A_m C_m \phi^m \frac{d\eta^i}{dt} + D_i \nabla \phi^i \cdot \nabla \eta^i - I_i^s \eta^i - A_m \lambda \phi^m \eta^i \, dx \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \theta r_n \eta^i \, dx \, dt = 0 \\
&\int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m H(\phi^m)\eta^e - A_m C_m \phi^m \frac{d\eta^e}{dt} - D_e \nabla \phi^e \cdot \nabla \eta^e + I_e^s \eta^e - A_m \lambda \phi^m \eta^e \, dx \, dt \\
&+ \int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \theta r_n \eta^e \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\partial \mathcal{B}_q} \bar{q}^e \cdot \eta^e \, dS \, dt = 0 \\
&\int_0^T \int_{\mathcal{B}} A_m \gamma r \cdot \xi - A_m C_r r \frac{d\xi}{dt} - A_m \eta \phi_n^m \xi \, dx \, dt = 0 \\
&\forall (\eta^i, \eta^e, \xi) \in \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_0^1) \cap \mathcal{H}^1(\mathcal{L}^2) \times \mathcal{L}^2(\mathcal{H}_0^1) \cap \mathcal{H}^1(\mathcal{L}^2) \times \mathcal{H}^1(\mathcal{L}^\gamma),
\end{aligned}
$$

esto es, u es una solución débil de (6.3)-(6.11), lo que finaliza la demostración. $\square$

Bibliografía

[1] L. Ambrosio, N. Gigli, and G. Savaré. *Gradient Flows in Metric Spaces and in the Space of Probability Measures*. Birkhäuser, Verlag AG, Basel, Boston, Berlin, second edition, 2008.

[2] E. Asplud. Averaged norms. *Isr. J. Math.*, 5:213–216, 1967.

[3] S. Boyd and L. Vandenberghe. *Convex Optimization*, volume 25. Cambridge, 2004.

[4] H. Brezis. *Analyse Fonctionnelle*. Dunod, Paris, 1999.

[5] P. Colli Franzone, L.F. Pavarino, and G. Savaré. Computational electrocardiology: mathematical and numerical modeling. In *Complex systems in Biomedicine*. Springer Milan, 2006.

[6] P. Colli Franzone and G. Savaré. Degenerate evolution systems modeling the cardiac electric field at micro and macroscopic level. In *Evolution Equations, Semigroups and Functional Analysis*, volume 50, pages 49–78. 2002.

[7] I. Ekeland and R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. SIAM, Philadelphia, 1999.

[8] L.C. Evans. *Partial Differential Equations*. American Mathemarical Society, 1998.

[9] F.H. Fenton and E. M. Cherry. Models of cardiac cell. *Scholarpedia*, 3(8):1868, 2008.

[10] G. Friesecke and G. Dolzmann. Implicit time discretization and global existence for a quasi-linear evolution equation with nonconvex energy. *SIAM J. Math. Anal.*, 28(2):63, 1997.

[11] S. Göktepe and E. Kuhl. Computational modeling of cardiac electrophysiology: a novel finite element approach. *Int. J. Numer. Methods Eng.*, 79(2):156–178, 2009.

[12] D. Hurtado and D. Henao. Gradient flows and variational principles for cardiac electrophysiology: toward efficient and robust numerical simulations of the electrical activity of the heart. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 273:238–254, 2014.

[13] D. E. Hurtado and E. Kuhl. Computational modelling of electrocardiograms: repolarisation and T-wave polarity in the human heart. *Computer Methods Biomechanics Biomedical Enginnering*, 17(9):986–996, 2014. http://doi.org/10.1080/10255842.2012.729582.

[14] M. Ortiz and L. Stainier. The variational formulation of viscoplastic constitutive updates. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 171:419–444, 1999.

[15] M. Pennacchio, G. Savaré, and P. Colli Franzone. Multiscale modeling for the bioelectric activity of the heart. *SIAM J. Math. Anal.*, 37(4):1333–1370, 2006.

[16] A. J. Pullan, M. L. Buist, and L. K. Cheng. *Mathematically Modelling the Electrical Activity of the Heart: From Cell to Body Surface and Back Again.* World Scientific Publishing Co., Singapore, 2005.

[17] J. M. Rogers and A. D. McCulloch. A collocation-Galerkin finite element model of cardiac action potential propagation. *IEEE Trans. Biomed. Eng.*, 41(8):743–757, 1994.

[18] J. Wong, S. Göktepe, and E. Kuhl. Computational modeling of electrochemical coupling: a novel finite element approach towards ionic models for cardiac electrophysiology. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, 200(45-46):3139–3158, 2011.