PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS

Equidistribución de Puntos de Hecke

Por

Erik Felipe Contreras López

Tesis presentada a la Facultad de Matemáticas
de la Pontificia Universidad Católica de Chile,
como un requisito para optar al
grado de Magíster en Ciencias Exactas mención Matemática.

Profesor Guía : Ricardo Menares Valencia - Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Comisión Informante:
Profesor Juan Rivera Letelier - Pontificia Universidad Católica de Chile.
Profesor Yves Martin - Universidad de Chile.

21 de Agosto del 2014
Santiago-Chile

Índice general

Agradecimientos

Quiero partir por agradecer al profesor Ricardo Menares por aceptar ser guía de este trabajo y por siempre tratar de orientarme de la mejor forma para resolver las dudas surgidas, así como también, como un futuro matemático. Agradezco también a los profesores Yves Martin y Juan Rivera-Letelier por ser parte del comité de tesis, por sus consejos a lo largo de este proceso e igualmente por sus correcciones y sugerencias acerca de la tesis.

Se agradece a los profesores de la Facultad de Matemáticas de la PUC por su gran trabajo como investigadores y docentes. Sin duda ellos son una gran influencia en nosotros: los estudiantes y futuros profesionales. En particular, quiero destacar a la profesora Mariel Sáez por su gran disposición, su calidad humana y por su ayuda cuando lo necesité. Es un ejemplo a seguir.

Si bien los profesores son una parte importante de la facultad, la otra parte es sostenida por el personal administrativo y de aseo. Se agradece su excelente trabajo y la buena onda a todos ellos, en especial a Oscar Salazar y Ernerstina Maripangui (la *Tia Tina*).

Les agradezco a mis amigos y compañeros (a los cabros) por su importante contribución a la teoría de las tallas y memes que surgieron en la oficina M23. También se cree que se pudo discutir un poco de matemática, aunque esto está solo a nivel de conjetura.

También quiero agradecer y hacer un reconocimiento a mi familia: sin duda una oda al esfuerzo, siempre una motivación más para salir adelante cuando es necesario. Gracias por la paciencia y por comprender este camino que he tomado.

A mi María Elena, el amor de mi vida, le agradezco el apoyo incondicional la paciencia y el amor que me ha entregado siempre, y en particular en todo este proceso, en el cual fuiste mi polola. Ahora comenzamos nuevos desafíos, tanto académicamente como familiarmente. Te amo esposa mía!

Se agradece el financiamiento de los Proyectos Fondecyt 11110225 y 1100922.

Capítulo 0

Introducción

Partiremos por recordar un poco acerca de la Topología en espacios de medida.

Definición 0.0.1. Sea X un espacio de medida y sea $P(X)$ el conjunto de medidas de probabilidad sobre X. Denotamos por

$$C_c^0(X) = \{f : X \to \mathbb{R} \text{ continua y de soporte compacto}\}.$$

Diremos que una sucesión $\nu_n \subset P(X)$ converge a $\nu \in P(X)$ si para cualquier función $f \in C_c^0(X)$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f d\nu_n = \int_X f d\nu,$$

Este hecho lo denotamos por $\nu_n \to \nu$.

Dado un punto $y \in X$ se denotamos por δ_y la medida de Dirac soportada en y. Esta cumple que

$$\int_X f d\delta_y = f(y)$$

para toda $f \in C_c^0(X)$. De manera más general, si $V \subset X$ es un conjunto finito, definimos la medida

$$\delta_V = \frac{1}{\#V} \sum_{y\in V} \delta_y.$$

Esta cumple con

$$\int_X f d\delta_V = \frac{1}{\#V} \sum_{y \in V} f(y)$$

para toda $f \in C_c^0(X)$.

Definición 0.0.2. Sea $L \subset X$ y $\nu \in P(X)$. Decimos que ν está soportada en L si para toda $f \in C_0(X)$ cuyo soporte es disjunto a L, se tiene que

$$\int_L f d\nu = 0.$$

Definición 0.0.3. Diremos que una sucesión $V_n \subset X$, donde cada V_n es un conjunto finito, se equidistribuye con respecto a una medida $\nu \in X$ si $\delta_{V_n} \to \nu$ cuando $n \to \infty$.

Se define por $\mathbb{H}$ el semiplano superior de Poincaré como

$$\mathbb{H} := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z > 0\}.$$

Sea V un subespacio vectorial de funciones $SL(2,\mathbb{Z})$-invariantes del espacio $\{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\}$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos el n-ésimo operador de Hecke definido como

$$T_n f(z) := \sum_{ad=n} \sum_{b \text{ mód } d} f\left(\frac{az+b}{d}\right).$$

Pasemos a definir nuestro problema. El objetivo central de esta tesis es estudiar el problema de la Equidistribución de puntos de Hecke, a saber:

Para toda $f \in C_c^0(SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})$ y todo $z \in SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma(n)} T_n f(z) = \frac{1}{\operatorname{vol}(SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H})} \int_{SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}} f d\mu,$$

donde $d\mu = y^{-2}dxdy$ es la medida hiperbólica y $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$.

Estudiaremos dos demostraciones del problema anterior: una que involucra la Teoría Espectral de Formas Automorfas y otra con herramientas de la Teoría Ergódica. En ambos casos, la demostración es una revisión bibliográfica de los artículos:

1. *Equidistribution des points de Hecke* de Laurent Clozel y Emmanuel Ullmo (2004) [5],

2. *Ergodic theoretic proof of equidistribution of Hecke points* de Alex Eskin y Hee Oh (2006) [7].

En el primer caso, la demostración se expone en el Capítulo 3 de [5]. Se usará fuertemente la descomposición espectral del laplaciano

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right)$$

en una parte discreta y continua, la cual viene dada por el Teorema 2.6.1. La estrategia principal, será estudiar la acción de T_n sobre funciones en el espectro discreto y sobre funciones en el espectro continuo. Esta técnica permite considerar clases de funciones más grandes como el espacio de funciones que tienden a 0 al infinito. Además, no sólo se obtiene una convergencia puntual, sino también una convergencia L^2 y una convergencia uniforme sobre compactos (ver Teorema 3.1.1).

El segundo caso es la demostración Ergódica la cual se presenta en [7]. Los autores utilizan consecuencias del teorema de clasificación de medidas de Ratner (ver [13], Corollary 1.3.7, página 22), tales como la Proposición 2.1 y el Teorema 2.2 de [7]. Dicho enfoque en cierto sentido es más general, pues se obtiene un teorema sobre un cubrimiento del espacio $SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$. Además, las mismas técnicas nos permitirán reemplazar $SL(2,\mathbb{R})$ por otros grupos algebraicos y $SL(2,\mathbb{Z})$ por subgrupos aritméticos. Sin embargo, la desventaja de esta técnica, es que no entrega información sobre funciones test más generales ni sobre convergencia en otras normas, así como tampoco tasas de convergencia.

En esta tesis, el enfoque ergódico será desarrollado en el Capíulo 4, en el cuál partimos por transformar el problema en $SL(2,\mathbb{Z})\backslash\mathbb{H}$ a $SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R})$ (Ver Observación 4.1.1) y comprendiéndolo desde el punto de vista de la equidistribución. En efecto, los operadores de Hecke T_n pueden escribirse como

$$T_n f = \frac{1}{\#\Gamma\backslash\Gamma a_n \Gamma} \sum_{\gamma\in\Gamma\backslash\Gamma a_n\Gamma} f(\gamma z),$$

donde $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ y a_n es una sucesión adecuada en $GL(2,\mathbb{R})$. Ahora bien, será posible ver que T_n define una medida δ_n sobre $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$:

$$\delta_n := \frac{1}{\#\Gamma\backslash\Gamma a_n \Gamma} \sum_{y\in\Gamma\backslash\Gamma a_n\Gamma} \delta_y$$

es decir, nuestro problema se reduce a estudiar la convergencia de medidas

$$\delta_n \to \mu_G, \quad n \to \infty$$

donde μ_G es la medida de Haar sobre $\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})$. En otras palabras, estudiamos la equidistribución de los conjuntos $\Gamma\backslash\Gamma a_n \Gamma$ con respecto a la medida μ_G.

Finalmente, el resultado que nos permite comprender más profundamente este punto de vista se presenta en la seción 4.4 y se formula para el grupo algebraico $SL(n,\mathbb{R})$ y para subgrupos aritméticos de éste. La demostración se expone en la sección 4.5.

Capítulo 1

Algebras de Hecke

1.1. Clases Dobles

Sea X un conjunto no vacío. Si H es un grupo que actúa por la izquierda sobre X, denotamos por $H\backslash X$ al conjunto de órbitas de X bajo esta acción (análogamente, cuando el grupo actúa por la derecha el conjunto de órbitas se denota X/H). Por ejemplo, si $X = G$ es un grupo, con $H \leq G$, H actúa sobre G por traslación izquierda y $H\backslash G$ es el conjunto de clases derechas Hg con $g \in G$. Análogamente, vía traslación por la derecha, formamos el conjunto de órbitas G/H.
En un caso más general, si H_1 y H_2 son grupos que actúan sobre X por la izquierda y derecha respectivamente, tal que

$$(h_1x)h_2 = h_1(xh_2)$$

para $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2, x \in X$, entonces se tiene también un conjunto de órbitas: diremos que $x, y \in X$ están en la mísma órbita si $x = h_1yh_2$ para algún $h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$. El conjunto de órbitas es denotado por $H_1\backslash X/H_2$. En el caso especial de que $X = G$ sea un grupo y H_1, H_2 son subgrupos de G, $H_1\backslash G/H_2$ se denomina el conjunto de *clases dobles*. Notar que $H_1\backslash G/H_2$ puede ser visto como el conjunto de órbitas producido por la acción de H_1 sobre G/H_2 por la izquierda, así como también el conjunto de órbitas producido por la acción de H_2 sobre $H_1\backslash G$ por la derecha.

1.2. El Conmensurador y sus Propiedades

Definición 1.2.1. Sean Γ_1, Γ_2 dos subgrupos de G. Diremos que éstos son conmensurables, si es que $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ tiene índice finito en Γ_1 y Γ_2. Cuando dos grupos son conmensurables, lo denotaremos por $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Proposición 1.2.1. *Sea $\mathcal{S}$ el conjunto de subgrupos de G. La relación de conmensurabilidad definida sobre $\mathcal{S}$ es transitiva.*

Demostración. Ver([1], Lemma 1.3, página 95). □

Sea ahora Γ un subgrupo de G. Definimos el conjunto

$$\mathrm{Comm}(\Gamma) = \left\{ g \in G : g\Gamma g^{-1} \sim \Gamma \right\},$$

y lo llamamos el *conmensurador* de Γ.

Lema 1.2.1. *Para Γ un subgrupo de G, el* $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ *es un subgrupo de G.*

Demostración. Observemos que $\mathrm{Comm}(\Gamma)$ es un conjunto no vacío, pues claramente la identidad de G pertenece al conmensurador. Sea $g \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$, y consideremos el automorfismo interno $\sigma_g : G \to G, x \mapsto g^{-1}xg$. Sabemos que este es un automorfismo que respeta las intersecciones de subgrupos de G y que también satisface que $\sigma_g(\Gamma) = g^{-1}\Gamma g, \sigma_g(g\Gamma g^{-1}) = \Gamma$. Luego

$$\sigma_g(\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}) = g^{-1}\Gamma g \cap \Gamma.$$

Como $g \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$, entonces $\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}$ tiene índice finito en Γ y $g\Gamma g^{-1}$, luego $\sigma_g(\Gamma \cap g\Gamma g^{-1}) = g^{-1}\Gamma g \cap \Gamma$ tiene índice finito en $\sigma_g(\Gamma) = g^{-1}\Gamma g$ y en $\sigma_g(g\Gamma g^{-1}) = \Gamma$, de donde se tiene que $g^{-1} \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$.

Además $a, b \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$, luego $a\Gamma a^{-1} \sim \Gamma$, $b\Gamma b^{-1} \sim \Gamma \Rightarrow ab\Gamma b^{-1}a^{-1} \sim a\Gamma a^{-1} \sim \Gamma$, y por transitividad, $ab\Gamma b^{-1}a^{-1} \sim \Gamma$, es decir, $ab \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$ y por tanto, $ab \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$. □

Ejemplo. Consideremos $G = GL(n, \mathbb{Q}), \Gamma = SL(n, \mathbb{Z})$, y N un natural cualquiera. Sea

$$\Gamma(N) = \{\gamma \in \Gamma : \gamma \equiv 1_n \mod N\},$$

donde 1_n es la matriz identidad de tamaño $n \times n$. La primera afirmación es la siguiente: $\mathrm{Comm}(\Gamma) = G$. Para ver esto, usemos el siguiente lema:

Lema 1.2.2. *Sea $\beta \in M_n(\mathbb{Z})$, con $\det \beta = b \neq 0$. Luego*

$$\Gamma(Nb) \subset \beta^{-1}\Gamma(N)\beta \cap \beta\Gamma(N)\beta^{-1}.$$

Demostración. Sean $\beta' = b\beta^{-1}, \gamma \in \Gamma(Nb)$. Como $\gamma \equiv 1 \mod Nb$, luego $\beta'\gamma\beta \equiv \beta'\beta \equiv b1_n \mod (Nb)$, y por lo tanto $\beta^{-1}\gamma\beta \equiv 1_n \mod N$ y en particular $\beta^{-1}\gamma\beta \in M_n(\mathbb{Z})$. Además, es claro que $\det \beta^{-1}\gamma\beta = 1$, de donde se tiene que $\beta^{-1}\gamma\beta \in \Gamma(N)$ y por lo tanto $\gamma \in \beta\Gamma(N)\beta^{-1}$. Análogamente, se tiene que $\gamma \in \beta^{-1}\Gamma(N)\beta$. □

Teniendo esto en mente, consideremos $\alpha \in G$, luego $\alpha = c\beta$ con c algún racional, y $\beta \in M_n(\mathbb{Z})$. Obviamente, dado que c es una constante, se tiene que $\alpha\Gamma\alpha^{-1} = \beta\Gamma\beta^{-1}$. Usando el lema anterior, $\Gamma \cap \beta\Gamma\beta^{-1} \supset \Gamma(b)$, con $b = \det \beta$. Como $[\Gamma : \Gamma(b)] < \infty$, tenemos que $[\Gamma : \Gamma \cap \alpha\Gamma\alpha^{-1}] < \infty$. Considerando el autormorfismo $\xi \mapsto \alpha^{-1}\xi\alpha$ y cambiando α^{-1} por α, obtenemos que

$$[\alpha\Gamma\alpha^{-1} : \alpha\Gamma\alpha^{-1} \cap \Gamma] < \infty.$$

Así, $\alpha \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$, y en conclusión $\mathrm{Comm}(SL(n,\mathbb{Z})) = GL(n,\mathbb{R})$.

Sea Λ un conjunto no vacío, y consideremos una familia arbitraria $\{\Gamma_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ de subgrupos de G los cuales son conmensurables con Γ. Notar que si $\alpha \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$, entonces, por transitividad, los grupos $\alpha\Gamma_\lambda\alpha^{-1}$ y Γ_μ son conmensurables para cualquier par de índices $\mu, \lambda \in \Lambda$.

Proposición 1.2.2. *Si $\alpha \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$, entonces la clase doble $\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu$ tiene descomposiciones en clases laterales disjuntas tanto derechas como izquierdas:*

$$\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu = \bigcup_{i=1}^{N} \Gamma_\lambda\alpha_i$$

$$\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu = \bigcup_{j=1}^{M} \beta_j\Gamma_\mu$$

donde $N = [\Gamma_\mu : \Gamma_\mu \cap \alpha^{-1}\Gamma_\lambda\alpha], M = [\Gamma_\lambda : \Gamma_\lambda \cap \alpha^{-1}\Gamma_\mu\alpha]$.

Demostración. Como $\alpha^{-1}\Gamma_\lambda\alpha \sim \Gamma_\mu$ (si $\alpha \in \mathrm{Comm}(\Gamma) \Rightarrow \alpha^{-1} \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$), entonces $[\Gamma_\mu : \Gamma_\mu \cap \alpha^{-1}\Gamma_\lambda\alpha]$ es un número natural N. Así, podemos considerar una descomposición en clases laterales disjuntas de Γ_μ como sigue:

$$\Gamma_\mu = \bigcup_{i=1}^{N} (\Gamma_\mu \cap \alpha^{-1}\Gamma_\lambda\alpha)\delta_i \tag{1.1}$$

luego $\alpha^{-1}\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu = \bigcup_{i=1}^N \alpha^{-1}\Gamma_\lambda\alpha\delta_i$, y por lo tanto

$$\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu = \bigcup_{i=1}^N \Gamma_\lambda\alpha\delta_i.$$

Para ver que la descomposición es disjunta, supongamos que no, y consideremos $\omega \in \Gamma_\lambda\alpha\delta_i \cap \Gamma_\lambda\alpha\delta_j$. De esta manera, existen $\gamma_\lambda, \widetilde{\gamma}_\lambda \in \Gamma_\lambda$ tal que

$$\gamma_\lambda\alpha\delta_i = \widetilde{\gamma}_\lambda\alpha\delta_j$$

de donde $\delta_i\delta_j^{-1} = \alpha^{-1}\gamma_\lambda^{-1}\widetilde{\gamma}_\lambda\alpha \in \alpha^{-1}\Gamma_\lambda\alpha$. Además, los $\delta_i's$ son representantes en Γ_μ, y por lo tanto $\delta_i\delta_j^{-1} \in \Gamma_\mu$, pero dado que la descomposición (1.1) es disjunta, $\delta_i\delta_j^{-1} \in \Gamma_\mu \cap \alpha^{-1}\Gamma_\lambda\alpha$ sólo cuando $i = j$, de donde se concluye que la descomposición es disjunta. La otra descomposición es análoga. □

Definición 1.2.2. Sean $\lambda, \mu \in \Lambda$. Se define el conjunto

$$R_{\lambda\mu} = \left\{ \sum_{k=1}^m c_k \cdot (\Gamma_\lambda\alpha_k\Gamma_\mu) : c_k \in \mathbb{Z}, \alpha_k \in \mathrm{Comm}(\Gamma), m \in \mathbb{N} \right\}.$$

Dada una doble clase $\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu$, definimos su *grado* como el número de clases derechas $\Gamma_\lambda\varepsilon$ contenidas en $\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu$. Este número será denotado por $\deg(\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu)$. Además, si $x = \sum_k c_k \cdot (\Gamma_\lambda\alpha_k\Gamma_\mu) \in R_{\lambda\mu}$, entonces podemos extender la noción de grado de la manera siguiente:

$$\deg(x) = \sum_k c_k \cdot \deg(\Gamma_\lambda\alpha_k\Gamma_\mu)$$

Notamos que $R_{\lambda\mu}$ es un conjunto no vacío el cual es un $\mathbb{Z}$-módulo. Además, se puede verificar que en general no se cumple que $R_{\lambda\mu} = R_{\mu\lambda}$. En efecto, podemos considerar $G = S_3$, y $\Gamma = \langle(1\ 2\ 3)\rangle$, luego $\mathrm{Comm}(\Gamma) = G$ (esto es porque G es grupo finito), si denotamos por $\Gamma_\lambda = \langle(1\ 2)\rangle, \Gamma_\mu = \langle(1\ 3)\rangle$, es posible verificar que si id es la identidad de G, entonces $\Gamma_\lambda \mathrm{id}\Gamma_\mu \notin R_{\mu\lambda}$, y por lo tanto $R_{\lambda\mu} \neq R_{\mu\lambda}$.

La definición del grado de una doble clase se podría considerando la cantidad de clases izquierdas contenidas en la clase doble, pero de hecho, es posible demostrar que no necesariamente estos dos grados son iguales.

Ahora, nos gustaría definir una ley de multiplicación: $R_{\lambda\mu} \times R_{\mu\nu} \to R_{\lambda\nu}$. Para esto, sean $\alpha, \beta \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$, y consideremos las descomposiciones

$$\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu = \bigcup_i \Gamma_\lambda\alpha_i$$

$$\Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu = \bigcup_j \Gamma_\mu \beta_j.$$

Notar que de esto último se tiene que $\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu$ es una unión finita de dobles clases de la forma $\Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu$. Esto se deduce de:

$$\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu = \bigcup_j \Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \beta_j = \bigcup_{i,j} \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j.$$

De esta forma, si colocamos $x = \Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu, y = \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu$, se define el producto

$$x \cdot y = \sum m(x \cdot y; z) z \in R_{\lambda\nu},$$

donde la suma recorre todas las clases dobles $z = \Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu \subset \Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu$, y

$$m(x \cdot y; z) := \# \left\{ (i,j) : \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j = \Gamma_\lambda \xi, \text{ para un } \xi \text{ fijo} \right\}. \tag{1.2}$$

Se observa que el último número mencionado, depende sólo de la elección de x, y, z y no de la elección de representantes $\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \xi$. En efecto, para esto notemos que $\Gamma_\lambda \alpha_j \beta_j = \Gamma_\lambda \xi \iff \Gamma_\lambda \alpha_i = \Gamma_\lambda \xi \beta_j^{-1}$. Además, dado un j, existe un único i que cumple la igualdad anterior, pues si hay un $k \neq i$ tal que

$$\Gamma_\lambda \alpha_k = \Gamma_\lambda \xi \beta_j^{-1} = \Gamma_\lambda \alpha_i$$

entonces las clases son iguales y esto es imposible, dado que los α_i son representantes de clases laterales. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \# \{(i,j) : \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j = \Gamma_\lambda\} &= \# \left\{ j : \xi \beta_j^{-1} \in \Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \right\} \\ &= \# \left\{ j : \beta_j \in \Gamma_\mu \alpha^{-1} \Gamma_\lambda \xi \right\} \\ &= \# \left\{ j : \Gamma_\mu \beta_j \subset \Gamma_\mu \alpha^{-1} \Gamma_\lambda \xi \right\} \\ &= \text{ el número de clases de la forma } \Gamma_\mu \epsilon \text{ en } \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu \cap \Gamma_\mu \alpha^{-1} \Gamma_\lambda \xi \end{aligned}$$

y notar que este último número es independiente de la elección de $\{\alpha_i\}$ y $\{\beta_j\}$. Demostremos ahora que es independiente de ξ. Notemos que si $\Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu = \Gamma_\lambda \eta \Gamma_\nu$, entonces $\xi = \gamma_\lambda \eta \gamma_\nu$, con $\gamma_\lambda \in \Gamma_\lambda$ y $\gamma_\nu \in \Gamma_\nu$. Por lo tanto

$$\Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu \cap \Gamma_\mu \alpha^{-1} \Gamma_\lambda \xi = (\Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu \cap \Gamma_\mu \alpha^{-1} \Gamma_\lambda \eta) \gamma$$

de donde se desprende que el número tampoco depende de la elección de ξ.

Proposición 1.2.3. *Sean* $x, y, z, \{\alpha_i\}, \{\beta_j\}, \xi$ *como antes. Luego*

$$\deg(z) \cdot m(x \cdot y; z) = \#\{(i,j) : \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j \Gamma_\nu = \Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu\}.$$

Demostración. Sea $\Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu = \bigcup_{k=1}^{S} \Gamma_\lambda \xi_k$ una descomposición en clases laterales disjuntas. Luego,

$$\Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j \Gamma_\nu = \Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu \iff \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j = \Gamma_\lambda \xi_k \quad \text{para algún } k.$$

Pero la igualdad anterior es válida para exactamente un k, por lo tanto

$$\begin{aligned} \#\{(i,j) : \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j \Gamma_\nu = \Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu\} &= \sum_{k=1}^{S} \#\{(i,j) : \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j = \Gamma_\lambda \xi_k\} \\ &= S \cdot m(x \cdot y; z) \end{aligned}$$

pues precisamente S es el número de clases derechas contenidas en z. □

Proposición 1.2.4. *Para todo* $x \in R_{\lambda\mu}, y \in R_{\mu\nu}$, *se cumple*

$$\deg(x \cdot y) = \deg(x) \cdot \deg(y).$$

Demostración. Utilizando la notación precedente y la Proposicíon 1.2.3, sabemos que

$$\begin{aligned} \deg(x \cdot y) &= \sum_{z = \Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu \subset \Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu} m(x \cdot y; z) \deg z \\ &= \sum_{z = \Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu \subset \Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu} \#\{(i,j) : \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j \Gamma_\nu = z\} \\ &= \deg x \cdot \deg y \end{aligned}$$

□

Proposición 1.2.5. *La ley de multiplicación anterior es asociativa, en el sentido que* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *para* $x \in R_{\kappa\lambda}, y \in R_{\lambda\mu}, z \in R_{\mu\nu}$.

Demostración. Consideremos el $\mathbb{Z}$-módulo

$$M_\mu = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_k \Gamma_\mu \xi_k : n \in \mathbb{N}, c_k \in \mathbb{Z}, \xi_k \in \mathrm{Comm}(\Gamma) \right\}.$$

Sea $u = \Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu = \bigcup_i \Gamma_\lambda \alpha_i$, la descomposición en clases laterales disjuntas. A u podemos asignarle una función $\mathbb{Z}$-lineal de $M_\mu \to M_\lambda$ por medio de la acción

$$u. \sum_k c_k \Gamma_\mu \xi_k = \sum_{i,k} c_k \Gamma_\lambda \alpha_i \xi_k.$$

Se observa que esta acción no depende de $\{\alpha_i\}, \{\xi_k\}$. Por linealidad, se obtiene una función $\Omega : R_{\lambda\mu} \to \mathrm{Hom}(M_\mu, M_\lambda)$, el cual es inyectivo. En efecto si $\sum_\alpha c_\alpha \cdot (\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu) \cdot \Gamma_\mu \xi = 0$ entonces $\Gamma_\lambda \alpha_1 \xi = \Gamma_\lambda \alpha_2 \xi$ para algunos α_1, α_2. Luego $\Gamma_\lambda \alpha_1 \Gamma_\mu = \Gamma_\lambda \alpha_2 \Gamma_\mu$ y esto no puede ser posible. Consideremos

$$\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu = \bigcup_i \Gamma_\lambda \alpha_i$$

$$\Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu = \bigcup_j \Gamma_\mu \beta_j$$

$$\Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu = \bigcup_k \Gamma_\lambda \xi_k$$

para cada $\Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu \subset \Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu$. Luego,

$$\begin{aligned}(\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu) \cdot \{(\Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu) \cdot (\Gamma_\nu \eta)\} &= \sum_{i,j} \Gamma_\lambda \alpha_i \beta_j \eta \\ &= \sum_{\xi,k} m(\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu \cdot \Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu ; \Gamma_\lambda \xi \Gamma_\nu) \Gamma_\lambda \xi_k \\ &= \{(\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu) \cdot (\Gamma_\mu \beta \Gamma_\nu)\} \cdot \Gamma_\nu \eta.\end{aligned}$$

Esto muestra que $(y \cdot z) \cdot a = y \cdot (z \cdot a)$ para todo $y \in R_{\lambda\mu}, z \in R_{\mu\nu}$ y $a \in M_\nu$. Si además $x \in R_{\kappa\lambda}$, tenemos

$$((x \cdot y) \cdot z) \cdot a = (x \cdot y) \cdot (z \cdot a) = x \cdot (y \cdot (z \cdot a)) = x \cdot ((y \cdot z) \cdot a) = (x \cdot (y \cdot z)) \cdot a$$

y por lo tanto, de la inyectividad de Ω, se tiene que $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

□

Lema 1.2.3. *Sea $\alpha \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$. Supongamos que el número de clases de la forma $\Gamma_\lambda \xi$ en $\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu$ es igual al número de clases izquierdas $\eta \Gamma_\mu$ en $\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu$. Luego, existe un conjunto de representantes $\{\alpha_i\}$, tal que*

$$\Gamma_\lambda \alpha \Gamma_\mu = \bigcup_i \Gamma_\lambda \alpha_i = \bigcup_i \alpha_i \Gamma_\mu.$$

Demostración. Sea $\Gamma_\lambda\xi \subset \Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu$ y $\eta\Gamma_\mu \subset \Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu$, con $\Gamma_\lambda\xi \cap \eta\Gamma_\mu \neq \emptyset$, luego $\xi = \gamma_\lambda\eta\gamma_\mu$ con $\gamma_\lambda \in \Gamma_\lambda, \gamma_\mu \in \Gamma_\mu$. Si colocamos $\widetilde{\gamma} := \gamma_\lambda^{-1}\xi$, entonces $\Gamma_\lambda\xi = \Gamma_\lambda\widetilde{\gamma}$ y $\eta\Gamma_\mu = \widetilde{\gamma}\Gamma_\mu$, es decir $\widetilde{\gamma}$ es un representante común para $\Gamma_\lambda\xi$ y $\eta\Gamma_\mu$. □

Proposición 1.2.6. *Sean* $\alpha, \beta \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$. *Luego,*

1. $\Gamma_\lambda\alpha\beta\Gamma_\mu = (\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\lambda) \cdot (\Gamma_\lambda\beta\Gamma_\mu)$ *si* $\Gamma_\lambda\alpha = \alpha\Gamma_\lambda$ *y*
2. $\Gamma_\lambda\alpha\beta\Gamma_\mu = (\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\mu) \cdot (\Gamma_\mu\beta\Gamma_\mu)$ *si* $\Gamma_\mu\beta = \beta\Gamma_\mu$.

Demostración. Como $\Gamma_\lambda\alpha = \alpha\Gamma_\lambda$, entonces

$$(\Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\lambda) \cdot (\Gamma_\lambda\beta\Gamma_\mu) = \Gamma_\lambda\alpha\Gamma_\lambda\beta\Gamma_\mu = \Gamma_\lambda\alpha\beta\Gamma_\mu.$$

Análogo en el otro caso. □

Sea S un semigrupo tal que $\Gamma \subset S \subset \mathrm{Comm}(\Gamma)$. Definimos por $R(\Gamma, S)$ el $\mathbb{Z}$-módulo de todas las sumas formales finitas

$$\sum_k c_k \cdot \Gamma\alpha_k\Gamma$$

con $c_k \in \mathbb{Z}$ y $\alpha_k \in S$. Con la ley de multiplicación introducida anteriormente, $R(\Gamma, S)$ es un anillo asociativo, y lo llamamos el anillo de Hecke con respecto a Γ y S. Además, el elemento $\Gamma = \Gamma \cdot 1 \cdot \Gamma$ es el elemento identidad.

Definición 1.2.3. Sea G un grupo. Diremos que una biyección $^* : G \to G$ es un anti-automorfismo, si $(\alpha\beta)^* = \beta^*\alpha^*$, para todo par de elementos $\alpha, \beta \in G$.

Ejemplo. Si consideramos G como cualquier grupo de matrices, un anti-autormofismo puede ser $A \mapsto A^t$, donde A^t denota la traspuesta de una matriz.

Proposición 1.2.7. *Si G tiene un anti-automorfismo $\alpha \mapsto \alpha^*$, tal que $\Gamma^* = \Gamma$ y $(\Gamma\alpha\Gamma)^* = \Gamma\alpha\Gamma$ para todo $\alpha \in S$, luego $R(\Gamma, S)$ es conmutativo.*

Demostración. Supongamos que G tiene un anti-automorfismo $^* : G \to G$. Como una doble clase $\Gamma\alpha\Gamma$, tiene la descomposición

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_j \Gamma\eta_j$$

aplicando el anti-automorfismo a esta igualdad nos queda

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_j \eta_j^* \Gamma$$

y por lo tanto se desprende que el número de clases laterales derechas e izquierdas son iguales. Al utilizar el Lema 1.2.3 se tiene que para todo par de elementos $\alpha, \beta \in S$ existe un conjunto de representantes $\{\alpha_i\}, \{\beta_j\}$ tal que

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_i \Gamma\alpha_i = \bigcup_i \alpha_i\Gamma$$

y

$$\Gamma\beta\Gamma = \bigcup_j \Gamma\beta_j = \bigcup_j \beta_j\Gamma.$$

Luego

$$\Gamma\alpha\Gamma = (\Gamma\alpha\Gamma)^* = \Gamma\alpha^*\Gamma = \bigcup_i \Gamma\alpha_i^*$$

$$\Gamma\beta\Gamma = (\Gamma\beta\Gamma)^* = \Gamma\beta^*\Gamma = \bigcup_j \Gamma\beta_j^*.$$

Ahora, si $\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma = \bigcup_\xi \Gamma\xi\Gamma$, luego

$$\Gamma\beta\Gamma\alpha\Gamma = \Gamma\beta^*\Gamma\alpha^*\Gamma = (\Gamma\beta\Gamma\alpha\Gamma)^* = \bigcup_\xi \Gamma\xi\Gamma.$$

Así

$$(\Gamma\alpha\Gamma)\cdot(\Gamma\beta\Gamma) = \sum_\xi c_\xi(\Gamma\xi\Gamma)$$

$$(\Gamma\beta\Gamma)\cdot(\Gamma\alpha\Gamma) = \sum_\xi c'_\xi(\Gamma\xi\Gamma).$$

Solo resta demostrar que $c_\xi = c'_\xi$. Usando la Proposición 1.2.3 tenemos que

$$\begin{aligned} c_\xi \cdot \deg(\Gamma\xi\Gamma) &= \#\{(i,j) : \Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma = \Gamma\xi\Gamma\} \\ &= \#\left\{(i,j) : \Gamma\beta_j^*\alpha_i^*\Gamma = \Gamma\xi\Gamma\right\} \\ &= c'_\xi \cdot \deg(\Gamma\xi\Gamma) \end{aligned}$$

de donde se desprende que $c_\xi = c'_\xi$ y la prueba concluye. $\square$

1.3. El caso $GL(2,\mathbb{R})$ y Operadores de Hecke

Consideremos $G = GL(2,\mathbb{R})$ y $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$. Sea $S = GL(2,\mathbb{Q})^+$ el semigrupo de matrices en $GL(2,\mathbb{Q})$ cuyo determinante es positivo.

Proposición 1.3.1. *Un conjunto completo de representantes de dobles clases para*

$$\Gamma\backslash GL(2,\mathbb{Q})^+/\Gamma$$

consiste de matrices diagonales

$$\mathrm{diag}(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix}$$

donde $d_1, d_2 \in \mathbb{Q}$, donde d_1/d_2 es un entero positivo.

Demostración. Ver página 44 de [3]. □

Proposición 1.3.2. *Con G y Γ como antes, $R(S,\Gamma)$ es conmutativa.*

Demostración. En vista de utilizar la Proposición 1.2.7 notamos que como $G = GL(2,\mathbb{R})$, entonces la traspuesta ${}^t : G \to G$ es un anti-automorfismo de G, el cual cumple que $(\Gamma)^t = \Gamma$ y que $(\Gamma\alpha\Gamma)^t = \Gamma\alpha\Gamma$, para cualquier α matriz diagonal como en la Proposición anterior. Precisamente dicha proposición muestra que la igualdad anterior se cumple para todo $\alpha \in S$. □

Ahora pasamos a definir un operador de Hecke. Si V es un subespacio vectorial de funciones Γ-invariantes de $\{f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}\}$, entonces definimos un operador de Hecke como un elemento de la forma T_α, definido como sigue. Sea

$$\begin{aligned} \varphi : R(S,\Gamma) &\to \mathrm{End}(V) \\ \Gamma\alpha\Gamma &\mapsto T_\alpha \end{aligned}$$

Donde $T_\alpha : V \to V$, es definido por $f(z) \mapsto \sum_i f(\alpha_i.z)$, con

$$\alpha_i.z = \frac{az+b}{cz+d},$$

y

$$\Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_i \Gamma\alpha_i$$

La definición anterior se extiende a cualquier elemento típico de $R(S,\Gamma)$, por linealidad, es decir

$$R(S,\Gamma) \ni \sum_k c_k \cdot \Gamma\alpha_k\Gamma \mapsto \sum_k c_k T_{\alpha_k} \in \mathrm{End}(V).$$

Sea $\mathcal{R}$ el grupo abeliano libre generado por los T_α cuando α recorre un conjunto completo de representantes para $\Gamma\backslash GL(2,\mathbb{Q})^+/\Gamma$. Dados $\alpha, \beta \in GL(2,\mathbb{Q})^+$, definimos una multiplicación de operadores de Hecke definida como:

$$T_\alpha \cdot T_\beta = \sum m(\alpha,\beta;\sigma) T_\sigma$$

donde la suma recorre los $\sigma \in \Gamma\backslash GL(2,\mathbb{Q})^+/\Gamma$. Acá $m(\alpha,\beta;\sigma) = m(x,y;z)$, con $x = \Gamma\alpha\Gamma, y = \Gamma\beta\Gamma, z = \Gamma\sigma\Gamma$, como en la Definición (1.2).

Proposición 1.3.3. *Dados α, β, se tiene que $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \cdot T_\beta$. Además, la multiplicación es asociativa y conmutativa.*

Demostración. Ver ([3], páginas 43-44). □

1.4. Formas Modulares

Primeramente, definimos el grupo modular, recordamos algunas cualidades de éste, y procedemos entones a definir las formas modulares clásicas. Se llama grupo modular a

$$SL(2,\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1, a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Proposición 1.4.1. *El grupo modular está generado por las transformaciones*

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración. Ver ([3], Proposition 1.2.3, página 20). □

Sea $\mathbb{H}$ el semiplano superior de Poincaré, es decir:

$$\mathbb{H} = \{x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}.$$

Definición 1.4.1. Sea Γ un subgrupo de $SL(2,\mathbb{R})$. Diremos que la acción de Γ sobre $\mathbb{H}$ es discontinua si para cualquier par de compactos $K_1, K_2 \subset \mathbb{H}$, se tiene que el conjunto

$$\{\gamma \in \Gamma : K_2 \cap \gamma(K_1) \neq \emptyset\}$$

es un conjunto finito.

Definición 1.4.2. Sea $\Gamma \subset SL(2,\mathbb{R})$ un subgrupo que actúa discontinuamente sobre $\mathbb{H}$. Un dominio fundamental para Γ es un conjunto abierto $F \subset \mathbb{H}$ tal que

1. Para todo $z \in \mathbb{H}$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(z) \in \overline{F}$,
2. Si $z_1, z_2 \in F$ son tales que $\gamma(z_1) = z_2$, para algún $\gamma \in \Gamma$, entonces $z_1 = z_2$ y $\gamma = \pm I$, donde I denota la matriz identidad.

Proposición 1.4.2. *Un dominio fundamental para* $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$ *es*

$$F = \left\{ z = x + iy \in \mathbb{H} : -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}, |z| > 1 \right\}.$$

Demostración. Ver ([3], Proposition 1.2.2, página 19). $\square$

Definición 1.4.3. Sea $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa y k un entero positivo par. Diremos que f es una forma modular de peso k si se satisface la relación

$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right) = (cz+d)^k f(z) \quad \text{para todo } \gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{Z}), \tag{1.3}$$

y la condición de que f sea holomorfa en ∞.

Observación 1.4.1. Notar que una función holomorfa $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ que cumple la relación (1.3), en particular cumple que $f(z+1) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{H}$. Sea $D' = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} - \{0\}$. Recordemos que la función $z \mapsto q = e^{2\pi i z}$ es tal que lleva $\mathbb{H}$ en D'. Así, la función $g : D' \to \mathbb{C}$, dada por $g(q) = f(\log(q)/(2\pi i))$ está bien definida aún cuando el logaritmo está solo determinado hasta $2\pi i\mathbb{Z}$ y $f(z) = g(e^{2\pi i z}) = g(q)$. Como f es holomorfa en el plano superior, entonces g es holomorfa sobre D', y por lo tanto g tiene desarrollo de Laurent $g(q) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n q^n$ para $q \in D'$. Además, como $|q| = e^{-2\pi \mathrm{Im}\ (z)}$, entonces se tiene que $q \to 0$ cuando $\mathrm{im}(z) \to \infty$. De esta manera, decimos que f es holomorfa en ∞ si g se extiende analíticamente a todo el disco, y llamamos a :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n q^n$$

donde $q = e^{2\pi i z}$, la expansión de Fourier de f.

Definición 1.4.4. Una forma modular f es cuspidal si $a_0 = 0$.

Notación. Sea $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$. Denotaremos por $M_k(\Gamma)$ el conjunto de formas modulares de peso k y por $S_k(\Gamma)$ el conjunto de formas cuspidales de peso k.

Obviamente, $S_k(\Gamma) \subseteq M_k(\Gamma)$. Es fácil ver que ambos son $\mathbb{C}$-espacios vectoriales. Mas aún, $M_k(\Gamma)$ es finito dimensional (ver [3], Proposition 1.3.2, página 27). Además, la colección de todas las formas modulares forma un anillo graduado, pues si $f \in M_k(\Gamma), g \in M_l(\Gamma)$, entonces $fg \in M_{k+l}(\Gamma)$.
Ahora, nos gustaría saber que existen formas modulares. Para esto, vamos a considerar las *series de Eisenstein.* Sea $k \geq 4$. Definimos

$$E_k(z) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}} \frac{1}{(mz+n)^k}.$$

Ésta es una serie absolutamente convergente cuando $k \geq 4$. Es posible verificar que cumple la condición (1.3). Por otra parte, también es posible verificar que es analítica en ∞ y para eso, se puede mostrar que $E_k(z)$ tiene el desarrollo en serie de Fourier (ver [9], Proposition 5, página 16):

$$E_k(z) = \zeta(k) + \frac{(2\pi)^k(-1)^{k/2}}{(k-1)!} \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(n) q^n$$

donde

$$\sigma_r(n) = \sum_{d|n} d^r,$$

y

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s},$$

es la función zeta de Riemann, definida para $s \in \mathbb{C}$ con Re $s > 1$. Notar que la contribución $\zeta(k)$ inmediatamente muestra que $E_k(z)$ no es cuspidal.

Por otra parte, para un k dado hay dos posibilidades:

$$S_k(\Gamma) = M_k(\Gamma)$$

o bien

$$\dim M_k(\Gamma) = 1 + \dim S_k(\Gamma).$$

Si $k = 2$ se sabe que $M_2(\Gamma) = \{0\}$. Para cada $k \geq 4$, existe la serie de Eisenstein E_k definida mas arriba. Luego, a toda forma modular $f \in M_k$ se le puede restar un múltiplo adecuado de E_k digamos λE_k tal que $f - \lambda E_k \in S_k(\Gamma)$.

Denotemos por $G_k := \zeta(k)^{-1} E_k(z)$. Notamos que ésta es una forma modular con coeficientes racionales (ver [9], Proposition 5, página 16). La idea ahora es construir formas modulares que sean cuspidales. Si bien esto es algo complicado, es posible usar el hecho de que el anillo de formas modulares es graduado. Consideremos las formas modulares

$$G_4(z) = 1 + 240 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_3(n) q^n$$

$$G_6(z) = 1 - 504 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_5(n) q^n,$$

y construyamos una nueva forma modular dada por

$$\Delta = \frac{1}{1728}(G_4^3 - G_6^2) = q - 24q^2 + 252q^3 - 1472q^4 + 4830q^5 + \ldots.$$

Mediante el cálculo explícito de los primeros términos, es claro que esta expresión es una forma cuspidal, y como $G_4 \in M_4(\Gamma), G_6 \in M_6(\Gamma)$, entonces $G_4^3, G_6^2 \in M_{12}(\Gamma)$, y por lo tanto Δ, pertenecen a $M_{12}(\Gamma)$.

En general, es posible dar fórmulas para la dimensión de espacios de formas modulares.

Proposición 1.4.3. *Supongamos que k es entero par no negativo. Sea $k = 12j + r$ con $0 \leq r \leq 10$. Entonces*

$$\dim M_{12j+r}(\Gamma) = \begin{cases} j+1, & si\ r = 0, 4, 6, 8 \\ j, & sir = 2. \end{cases}$$

Además, el anillo de formas modulares $\bigoplus_{k=0}^{\infty} M_k(\Gamma)$ es generado por G_4 y G_6.

Demostración. Ver ([3], Proposition 1.3.4, página 31). $\square$

1.5. Producto interno de Petersson

Sobre $S_k(\Gamma)$ existe un producto interno natural, conocido como el producto interno de Petersson. Si $f(z), g(z) \in S_k(\Gamma)$, es fácil ver que $f(z)\overline{g(z)}y^k$ es invariante bajo la tranfprmación $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$, para todo $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma$.

Lema 1.5.1. *La medida* $\frac{dxdy}{y^2} = \frac{dzd\bar{z}}{\mathrm{Im}\ (z)^2}$ *es una medida* $SL(2,\mathbb{R})$*-invariante de* $\mathbb{H}$*.*

Como $f(z)\overline{g(z)}y^k$ es Γ-invariante, usando el lema anterior se tiene que la integral

$$\langle f, g\rangle := \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)}y^k \frac{dxdy}{y^2}$$

está bien definida. Mas aún, es posible probar que como $f, g \in S_k(\Gamma)$, entonces la integral que define al producto interno es finita (ver [3], página 32).

1.6. Operadores de Hecke y Formas Modulares

En sección 1.3, se definió una acción de los operadores de Hecke sobre ciertos espacios vectoriales V de funciones complejas. En esta sección consideraremos los operadores de Hecke actuando sobre formas modulares, es decir, tomando como V el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de formas modulares de peso k, $M_k(\Gamma)$.

Proposición 1.6.1. *Sea* $\alpha \in GL(2,\mathbb{Q})^+$*. Luego, el operador de Hecke* T_α *sobre* $S_k(\Gamma)$ *es autoadjunto con respecto al producto interno de Peterson.*

Demostración. (Ver [3], página 47) □

Recolectando resultados se tiene que el anillo de Hecke es una familia conmutativa de operadores autoadjuntos sobre el espacio finito dimensional $S_k(\Gamma)$. En consecuencia, existe una base de funciones en $S_k(\Gamma)$ en la que cada una es función propia de todos los operadores de Hecke simultáneamente. Llamaremos a una tal f, una *función propia de Hecke.*

Definición 1.6.1. Sea n un entero positivo. Se define

$$T(n) := \sum_{\substack{d_1 d_2 = n \\ d_2 | d_1 \\ d_1, d_2 > 0}} T_{\mathrm{diag}(d_1, d_2)}.$$

Notar que, dado n entero positivo, la suma anterior es sobre aquellas matrices que están en la misma doble clase modulo Γ de la matriz

$$\begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por lo tanto si

$$\Gamma \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \bigcup_j \Gamma \delta_{n,j}$$

entonces $T(n)f(z) = \sum_j f(\delta_{n,j}.z)$. Lo interesante es que en este caso tenemos una descripción explícita de la descomposición de la doble clase involucrada.

Proposición 1.6.2. *Se tiene la siguiente descomposición:*

$$\Gamma \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma = \bigcup_{\substack{ad = n \\ b \mod d \\ a, d > 0}} \Gamma \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Demostración. Ver ([3], Proposition 1.4.4, página 47). □

Observación 1.6.1. De esta proposición notamos que si a es matriz de determinante n, entonces $\Gamma a \Gamma = \Gamma \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Gamma$, y por lo tanto

$$\deg(\Gamma a \Gamma) = \sum_{\substack{ad = n \\ b \mod d \\ a, d > 0}} 1 = \sum_{d|n} d = \sigma(n).$$

Sea $f \in S_k(\Gamma)$ con expansión de Fourier $\sum A(m)q^m$, y sea $T_n f$ con expansión de fourier $\sum B(m)q^m$. Es posible demostrar la siguiente relación:

$$B(m) = \sum_{\substack{ad = n \\ a|m}} \left(\frac{a}{d}\right)^{k/2} dA\left(\frac{md}{d}\right)$$

(ver [3], página 48). Sea $f(n)$ una función propia de Hecke, y supongamos que normalizamos su valor propio de tal forma que podemos escribir

$$\frac{1}{n^{1-k/2}} T_n f = \lambda(n) f.$$

Proposición 1.6.3. *Sea f una función propia de Hecke con valores propios $\lambda(n)$ normalizados como en la ecuación anterior. Luego, los coeficientes de Fourier $A(n)$ de f satisfacen:*

1. $A(1) \neq 0$
2. *Si $A(1) = 1$ entonces $\lambda(n) = A(n)$ para todo n*
3. *Si $A(1) = 1$ entonces los coeficientes $A(n)$ son multiplicativos, es decir si $(n, m) = 1$ entonces $A(nm) = A(n)A(m)$.*

Demostración. Ver ([3], página 48). $\square$

Capítulo 2

Teoría Espectral

A lo largo de esta sección $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$.

2.1. Laplaciano hiperbólico

Definimos el Laplaciano hiperbólico no Euclideano Δ (de aquí en adelante, Laplaciano), como el operador diferencial de segundo orden, que actúa sobre funciones definidas $\mathbb{H}$ dado por:

$$\Delta = y^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2}{\partial^2 y} \right).$$

Es posible verificar que este operador es $SL(2,\mathbb{R})$-invariante, es decir, si $g \in SL(2,\mathbb{R})$, y $\Delta(f) = F$, entonces $\Delta(f \circ g) = F \circ g$ para cualquier función f que sea suave sobre $\mathbb{H}$. Recordemos que una función propia f para este operador, con valor propio λ, es una función que satisface la ecuación $\Delta f = \lambda f$.

2.2. Series de Eisenstein para $SL(2,\mathbb{Z})$

Sea $z = x + iy \in \mathbb{H}$. Definimos la serie de Eisenstein como la serie

$$E_\infty(z,s) = \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma} (\mathrm{Im}\ (\gamma.z))^s.$$

Lema 2.2.1. *La serie es absolutamente convergente si* $\mathrm{Re}\ (s) > 1$. *Además verifica que*

$$E_\infty(\gamma.z, s) = E_\infty(\gamma, s)$$

para todo $\gamma \in \Gamma$.

Demostración. Ver([3], Exercice 1.6.1, página 74). □

Una propiedad fundamental de la serie de Eisenstein es la existencia de una prolongación analítica y de una ecuación funcional. Sea

$$E^*(z,s) = \pi^{-s}\Gamma(s)\zeta(2s)E_\infty(z,s), \tag{2.1}$$

donde $\zeta(s)$ denota la función zeta de Riemann.

Teorema 2.2.1. *La función* $E^*(z,s)$ *definida por* (2.1) *para* Re $s > 1$*, admite una prolongación meromorfa a todo el plano complejo. Es analítica en todo* $\mathbb{C}$ *salvo en* $s = 0, s = 1$*, donde* $E^*(z,s)$ *tiene polos simples. El residuo en* $s = 1$ *es la función constante* $z = 1/2$*. La serie de Eisenstein completa* (2.1) *verifica la ecuación funcional*

$$E^*(z,s) = E^*(z,1-s).$$

Además

$$E_\infty(x+iy,s) = O(y^\sigma) \quad \textit{cuando} \;\; y \to \infty$$

donde $\sigma = \max\{\text{Re } s, 1 - \text{Re } s\}$.

Demostración. Ver([3], Theorem 1.6.1, página 66). □

Observación 2.2.1. Del Teorema anterior deducimos que $E_\infty(z,s)$ admite una prolongación meromorfa al plano complejo. De hecho, el residuo en $s = 1$ es

$$\text{res}_{s=1}E_\infty(z,s) = \frac{\pi}{2\Gamma(1)\zeta(2)}\text{res}_{s=1}E^*(z,s) = \frac{3}{\pi}.$$

2.3. Formas de Maass

En esta sección definiremos las formas de Maass para el grupo modular Γ.

Definición 2.3.1. Diremos que una función suave $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ es una forma de Maass para Γ si cumple las siguientes tres condiciones

1. f es invariante bajo Γ, es decir, $f(\gamma.z) = f(z)$ para todo $\gamma \in \Gamma$,

2. f es una función propia de Δ,

3. f tiene a lo más crecimiento polinomial al infinito, es decir, $f(x+iy) = O(y^N)$ cuando $y \to \infty$ para algún N, donde $x \in K$, con K compacto.

Denotaremos por $\mathcal{A}_s(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ al conjunto de formas de Maass cuyo valor propio es $\lambda = s(1-s)$ y por $\mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ el conjunto de todas las funciones suaves que cumplen solo con la primera propiedad anterior.

Ejemplo. La serie de Eisenstein $E_\infty(z,s)$ es una forma de Maass, con valor propio $s(1-s)$.

Observación 2.3.1. Existe una relacion entre formas modulares y formas de Maass: dada una forma modular de peso k, la función $y^{k/2}f(x+iy)$ es una forma de Maass *de peso k*, con respecto al Laplaciano *de peso k* definido por

$$\Delta - y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + iky\frac{\partial^2}{\partial x},$$

con valor propio asociado $\lambda = \frac{k}{2}(1-\frac{k}{2})$ (ver [3], Exercise 2.1.7(a), Página 145).

En general, si $f \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, se tiene que

$$f\left(\begin{pmatrix} 1 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.z\right) = f(z)$$

es decir $f(z+m) = f(z)$ para todo m entero, y por lo tanto tiene sentido escribir la expansión en series d Fourier

$$f(z) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(y)e^{2\pi inx}$$

donde los coeficientes están dados por

$$f_n(y) = \int_0^1 f(z)e^{-2\pi inx}dx.$$

Si f es suave, la serie converge absolutamente y uniformemente en compactos. Mas aún, en el caso de series de Eisenstein, la expansión de Fourier puede ser mas explícita:

Proposición 2.3.1. *Sea* Re $s > 1$. *Entonces*

$$E(z,s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s} + \sum_{n\neq 0} \varphi(n,s)W_s(nz)$$

donde

$$\varphi(s) := \sqrt{\pi}\frac{\Gamma(s-1/2)}{\Gamma(s)}\frac{\zeta(2s-1)}{\zeta(2s)},$$

$$\varphi(n,s) := \pi^s\Gamma(s)^{-1}\zeta(2s)^{-1}|n|^{-1/2}\sum_{ab=|n|}\left(\frac{a}{b}\right)^{s-1/2},$$

$$W_s(z) := 2\sqrt{y}K_{s-1/2}(2\pi y)e^{2\pi i x}$$

y

$$K_s(y) = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{y}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)}t^{s-1}dt.$$

Demostración. Ver [11], página 60. □

De hecho, mas generalmente, toda forma de Maass tiene una descomposición en serie similar a la descrita anteriormente.

Proposición 2.3.2. *Sea f una forma de Maass con valor propio $s(1-s)$, tal que*

$$f(z) = o(e^{2\pi y}) \text{ cuando } y \to \infty.$$

Entonces

$$f(z) = a_0(y) + \sum_{n\in\mathbb{Z}-\{0\}} a(n)W_s(nz)$$

donde el término a_0 es

$$a_0(y) = \frac{A}{2}(y^s + y^{1-s}) + \frac{B}{2s-1}(y^s - y^{1-s}).$$

Ademas, los coeficientes a_n no nulos, satisfacen

$$a_n = O(e^{\varepsilon|n|}),$$

para todo $\varepsilon > 0$, donde la constante involucrada depende de ε y f. Finalmente, cuando $y \to \infty$, tenemos que

$$f(z) = a_0(y) + O(e^{-2\pi y}).$$

Demostración. Ver ([11], Theorem 3.1, página 54). □

Definición 2.3.2. Se define como $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ al espacio generado por todas las *formas cuspidales*, es decir, el espacio de todas las formas de Maass acotadas tales que su coeficiente de Fourier constante a_0 es nulo.

2.4. Propiedades del Laplaciano

Denotemos por $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ el espacio de formas de Maass las cuales son cuadrado integrables sobre el cuociente $\Gamma\backslash\mathbb{H}$, con respecto a la medida

$$d\mu = y^{-2}dxdy,$$

es decir,

$$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \left\{ f \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) : \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty \right\}.$$

Este espacio puede ser visto como

$$L^2(F) = \left\{ f : F \to \mathbb{C} : \int_F |f(z)|^2 d\mu(z) < \infty \right\},$$

donde F es el dominio fundamental para $SL(2,\mathbb{Z})$. El espacio $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ es equipado con un producto interno:

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(z)\overline{g(z)} d\mu(z),$$

el cual está bien definido: si $f, g \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, entonces por la desigualdad de Cauchy-Schwartz,

$$\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} |f(z)\overline{g(z)}| d\mu(z) \leq \left(\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} |f(z)|^2 d\mu(z) \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} |g(z)|^2 d\mu(z) \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Notar que como $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ es de medida finita, se tiene que las constantes pertenecen a dicho espacio. En efecto

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) &= \int_{-1/2}^{1/2} \int_{\sqrt{1-x^2}}^{\infty} \frac{dydx}{y^2} \\ &= \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

Definición 2.4.1. Denotamos por

$$\mathcal{B}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \{ f \in \mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) : f \text{ es acotada} \}.$$

De la definición se desprende inmediatamente que $\mathcal{B}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \subset L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Para el proposito de una resolución espectral de $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, reducimos el dominio de Δ a

$$\mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \{f : f, \Delta f \in \mathcal{B}(\Gamma\backslash\mathbb{H})\},$$

el cual es denso en $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

Lema 2.4.1. *Sea F el dominio fundamental para Γ. Para $f, g \in \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ tenemos*

$$\langle -\Delta f, g\rangle = \int_F \nabla f \overline{\nabla g} dxdy.$$

Demostración. Ver ([11], Lemma 4.1, página 64). □

De esta proposición, se desprenden fácilmente dos corolarios importantes:

Corolario 2.4.1. *Para $f, g \in \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ tenemos*

$$\langle \Delta f, g\rangle = \langle f, \Delta g\rangle.$$

Corolario 2.4.2. *Para $f \in \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ tenemos*

$$\langle -\Delta f, f\rangle = \int_F |\nabla f|^2 dxdy \geq 0.$$

2.5. Recuerdos de Análisis Funcional

La presente sección es para recordar algunas definiciones y hechos que servirán para la descomposición espectral de $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ con respecto al laplaciano hiperbólico. El resultado principal será presentado como el *Teorema de Hilbert-Schmidt* (ver Teorema 2.5.2), el cual dará una descomposición espectral para una clase especial de operadores lineales acotados sobre un espacio de Hilbert: la clase de los operadores compactos y autoadjuntos.

2.5.1. Operadores Autoadjuntos

Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert, y $T : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ un operador lineal no acotado. Denotamos por $D(T)$ su dominio y $R(T)$ su rango, y asumimos que $\Delta(T)$ es denso en $\mathcal{H}$. El operador adjunto T^* se define vía $\langle Tf, g\rangle = \langle f, T^*g\rangle$. Diremos que un operador T es simétrico si

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

para todo $x, y \in D(T)$ y autoadjunto si $T = T^*$.

Lema 2.5.1. *Los valores propios de un operador simétrico son reales. Además, funciones propias correspondientes a valores propios distintos son ortogonales.*

Demostración. Ver ([11], Lemma A.1-A.2, página 185). □

Diremos que un operador T es no negativo si es que para toda función $f \in D(T)$ se tiene $\langle Tf, f\rangle \geq 0$. Por lo tanto, los valores propios de un operador simétrico y no negativo son reales y no negativos.

Ejemplo. Notemos que los últimos dos corolarios de la sección pasada dicen que el operador $-\Delta$ es simétrico y no negativo. Luego, por la reciente observación, sus valores propios son no negativos.

Sea ahora T un operador autoadjunto en el espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Se define $R_\lambda = (T - \lambda I)^{-1}$.

Definición 2.5.1. Un complejo λ es un punto regular si R_λ es definido sobre $\mathcal{H}$ y acotado. El resto de los puntos de $\mathbb{C}$ conforman el espectro de T, denotado por $\sigma(T)$. Éste conjunto es particionado en el espectro puntual y espectro continuo (no es necesariamente una partición disjunta):

- λ está solo en el espectro puntual si y sólo si $D(R_\lambda)$ es un conjunto no denso en $\mathcal{H}$ y R_λ es acotado.
- λ está solo en el espectro continuo si y sólo si $D(R_\lambda)$ es un conjunto denso en $\mathcal{H}$ y R_λ es acotado.
- λ está en ambos espectros si y sólo si $D(R_\lambda)$ es un conjunto no denso en $\mathcal{H}$ y R_λ es no acotado.

Si bien el resultado que nos guiará a la descomposición espectral se aplica a operadores definidos sobre un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$, será posible extender tal resultado a nuestro operador Δ, no acotado, mediante el siguiente teorema.

Teorema 2.5.1. *Sea $\mathcal{H}$ un espacio de Hilbert y D un subconjunto denso de H. Si T es un operador lineal definido sobre D, no negativo y simétrico, entonces T admite una extensión a todo el espacio. Además, dicha extensión es autoadjunta.*

Demostración. Ver([11], Theorem A.3, página 186). □

2.5.2. Operadores integrles de Hilbert-Schimdt

Sea F un dominio en $\mathbb{R}^2$. Un operador integral

$$(Lf)(z) = \int_F k(z,w) f(w) dw$$

con kernel $k \in L^2(F \times F)$ es llamado de tipo Hilbert-Schmidt. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz,

$$\|L\|^2 \leq \int \int_{F \times F} |k(z,w)|^2 dz dw$$

y por lo tanto se deduce que L es un operador acotado. Mas aún, si $k(z,w) = \overline{k(z,w)}$ entonces L es simétrico.

Ejemplo. Si F tiene medida finita, entonces un operador integral con kernel acotado, es un operador de tipo Hilbert-Schmidt.

A continuación, presentamos el teorema que nos permitirá hacer la descomposición espectral.

Teorema 2.5.2 (Hilbert-Schmidt). *Sea $L \neq 0$ un operador integral simétrico de tipo Hilbert-Schmidt. Luego*

1. *L tiene espectro puramente discreto,*

2. *Los espacios propios de L tienen dimensión finita,*

3. *Los valores propios de L pueden acumularse solo en 0,*

4. *L tiene a lo menos un valor propio, y el mas grande de ellos es dado por*

$$\lambda_0 = \sup_{f \neq 0} \frac{\|Lf\|}{\|f\|} = \|L\|,$$

donde el supremo es alcanzado por una función propia de L,

5. *El rango de L en $L^2(F)$ es generado por funciones propias de L. Sea $\{u_j\}_{j\geq 0}$ un sistema ortonormal maximal de funciones propias de L en $L^2(F)$, es decir*

$$\langle u_j, u_k\rangle = \delta_{jk}, Lu_j = \mu_j u_j con |\mu_0| \geq |\mu_1| \geq \cdots .$$

Luego, cualquier f en el rango de L tiene una representación en series

$$f(z) = \sum_{j\geq 0} \langle f, u_j\rangle u_j(z).$$

Demostración. Ver [8], páginas 372, 377, 382 y 383. □

2.6. Descomposición Espectral

La idea de esta sección es dar un paseo por los elementos principales para una demostración del siguiente teorema:

Teorema 2.6.1. *Para toda función $u \in \mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \oplus \mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$*[1]*, se tiene que*

$$u(z) = \sum_{j\geq 0} \langle u, u_j\rangle u_j(z) + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} \langle u, E(\cdot, 1/2 + ir)\rangle E(z, 1/2 + ir)dr.$$

Donde $\{u_j\}_{j\geq 1}$ es un sistema ortonormal completo de formas de Maass cuspidales y $u_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$. Si además u pertenece al dominio $\mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ del Laplaciano hiperbólico, entonces la serie converge absolutamente y uniformemente sobre todo compacto. También se tiene una fórmula para la norma:

$$\|u\|^2_{L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})} = \sum_{j\geq 0} |\langle u, u_j\rangle|^2 + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}} |\langle u, E(\cdot, 1/2 + ir)\rangle|^2 dr.$$

Este resultado será una consecuencia inmediata de los teoremas 2.6.4 y 2.6.5 demostrados mas adelante.

[1] Ver la definición de $\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ en la página 37.

2.6.1. Parte discreta

Notamos que de los corolarios 2.4.1-2.4.2, se puede observar que un valor propio $\lambda = s(1-s)$ asociado a una función propia $f \in \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, es real y no negativo. Por lo tanto, se tiene que $s = \frac{1}{2} + it$ (con $t \in \mathbb{R}$) o $s \in [0,1]$.

Para realizar la descomposición espectral de Δ en $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, se introducirán operadores integrales sobre este espacio y se estudiarán propiedades relacionados a ellos.

Definición 2.6.1. Vamos a denotar por operador integral invariante, con kernel $k(z,w)$ a uno de la forma

$$(Lf)(z) = \int_{\mathbb{H}} k(z,w)f(w)d\mu(w),$$

donde el kernel es invariante en el sentido que $k(z,w) = k(u(z,w))$, y $f : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$, donde $u(z,w)$ es definido por

$$\cosh \rho(z,w) = 1 + 2u(z,w)$$

$$\rho(z,w) = \log \frac{|z-\overline{w}| + |z-w|}{|z-\overline{w}| - |z-w|},$$

y por lo tanto

$$u(z,w) = \frac{|z-w|^2}{4\mathrm{Im}\ z\mathrm{Im}\ w}.$$

Una propiedad importante es la siguiente:

Proposición 2.6.1. *Un operador integral invariante conmuta con el laplaciano.*

Demostración. Ver ([11], Theorem 1.9, página 67). □

Notamos que si restringimos el dominio de L a $\mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, podemos escribir

$$(Lf)(z) = \int_{F} K(z,w)f(w)d\mu(w),$$

donde F es el dominio fundamental para Γ y el nuevo *kernel* es dado por la serie

$$K(z,w) = \sum_{\gamma\in\Gamma} k(z,\gamma w).$$

Definición 2.6.2. El kernel $K(z,w)$ es llamado *kernel automorfo.*

Observación 2.6.1. De aquí en adelante asumiremos que el operador L, actúa sobre $\mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Además, asumiremos que $k(u)$ es una función suave, con soporte compacto en $\mathbb{R}^+$ (k debemos entenderla como una función que depende de $u(z,w)$, y por lo tanto, toma valores no negativos).

Notar que con estas suposiciones, el operador L visto con dominio $\mathcal{B}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, satisface que $L:\mathcal{B}(\Gamma\backslash\mathbb{H})\to\mathcal{B}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Más aún, se tiene la siguiente proposición

Proposición 2.6.2. *Un operador integral invariante L, satisface que*

$$L\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})\subseteq\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H}).$$

Demostración. Ver ([11], Proposition, página 65). □

En vista del Teorema de Hilbert-Schmidt, notamos que el kernel de nuestro operador Δ, ni siquiera es acotado sobre $F\times F$. Por consiguiente, la idea es relacionar Δ con un kernel acotado, y para esto consideramos:

$$H_\infty(z,w)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\int_{\mathbb{R}}k(z,t+\gamma.w)dt.$$

Notar que esta es una función automorfa en la segunda variable, bien definida (acá es vital que $k(u)$ tenga soporte compacto).

Lema 2.6.1. *Para $z,w\in\mathbb{H}$ tenemos uniformemente la desigualdad*

$$H_\infty(z,w)\ll 1+\mathrm{Im}\ z.$$

Demostración. Ver ([11], Lemma 4.2, página 65). □

Como la cota involucrada en el lema precedente es uniforme, se tiene que H_∞ es acotada en la segunda variable. Por lo tanto $H_\infty(z,\cdot)\in\mathcal{B}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

Proposición 2.6.3. *Dado $z\in\mathbb{H}$, la función $w\mapsto H_\infty(z,w)$, es ortogonal al espacio $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.*

Demostración. Ver ([11], Proposition 4.3, página 66). □

Consideremos la diferencia

$$\widehat{K}(z,w) = K(z,w) - H(z,w).$$

A esta diferencia la llamaremos la *parte compacta* de $K(z,w)$. Podemos considerar un nuevo operador integral $\widehat{L}$, actuando sobre funciones $f : F \to \mathbb{C}$, cuyo kernel sea $\widehat{K}(z,w)$.

Corolario 2.6.1. *$\widehat{L} = L$ sobre $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.*

Demostración. Ver ([11], Corollary 4.4, página 66) □

Para ver que la construcción de este nuevo kernel es importante, es posible conseguir el siguiente teorema.

Teorema 2.6.2. *Sea F el dominio fundamental para Γ. Luego, el kernel $\widehat{K}$ es acotado sobre $F \times F$.*

Demostración. Ver ([11], Proposition 4.5, página 67). □

Observación 2.6.2 (Ver ([11], Remarks, página 68))**.** Si bien, para lograr los resultados anteriores, hemos pedido que los operadores tengan kernel $k(u)$ con soporte compacto, también es posible obtener los mismos resultados para kernels $k(u)$ que no tengan soporte compacto, pero que tengan una condición de decaimiento rápido al infinito. Por ejemplo, es suficiente pedir que el kernel satisfaga:

$$k(u), k'(u) \ll (u+1)^{-2}.$$

Antes de comprender el espectro de Δ es necesario pasar por los operadores resolventes R_s. De hecho, veremos que la resolvente es un operador integral. Para esto, comenzamos por definir

$$G_s(u) := \frac{1}{4\pi}\int_0^1 (\xi(1-\xi))^{s-1}(\xi+u)^{-s}d\xi.$$

Supongamos que $s \in \mathbb{C}$ con $\operatorname{Re} s > 1$. Sea $-T_s$ el operador integral invariante con kernel G_s, es decir:

$$-(T_s f)(z) := \int_{\mathbb{H}} G_s(u(z,w))f(w)d\mu(w).$$

El primer resultado es el siguiente:

Teorema 2.6.3. *Si f es una función suave y acotada sobre $\mathbb{H}$, entonces*

$$(\Delta + s(1-s))T_s f = f.$$

Demostración. Ver ([11], Theorem 1.17, página 32). □

De esta manera, T_s es la inversa por la derecha del operador $(\Delta+s(1-s))$, es decir coincide con R_s donde éste sea bien definido y cuando Re $s > 1$. El kernel G_s tiene algunas propiedades las cuales serán de utilidad.

Proposición 2.6.4. *La integral que define a G_s converge absolutamente para* Re $s = \sigma > 0$. *Esto da una función $G_s(u)$ sobre $\mathbb{R}^+$ que cumple*

$$(\Delta + s(s-1))G_s = 0.$$

Además, se tienen las siguientes cotas para $G_s(u)$:

$$G_s(u) = \frac{1}{4\pi}\log\frac{1}{u} + O(1) \quad \textit{cuando } u \to 0 \tag{2.2}$$

$$G_s'(u) = -\frac{1}{4\pi u} + O(1) \quad \textit{cuando } u \to 0 \tag{2.3}$$

$$G_s(u) = O(u^{-\sigma}) \quad \textit{cuando } u \to +\infty. \tag{2.4}$$

Demostración. Ver ([11], Lemma 1.7, página 25). □

2.6.2. Descomposición espectral de Δ en $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$

La idea principal será definir un operador conveniente L en términos de la resolvente. De esta forma, por el Teorema 2.6.3, la resolvente es un operador integral con kernel $G_s(u)$. Partamos entonces por considerar $L = R_s$, para $s \geq 2$ (así, por las estimaciones dadas en la Proposición 2.6.3, el kernel $k(u) = G_s(u)$ satisface la condición de decrecimiento rápido al infinito estipulada en la Observación 2.6.2, y por lo tanto *podríamos* usar los resultados de compactificar el operador integral L). Además, notamos que el rango es denso en $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, pues dada $f \in \mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ (el cual es denso en $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$) definimos

$$g := (\Delta + s(s-1))f$$

de donde $f = R_s g$. Como $s \geq 2$, el kernel $G_s(u)$ satisface esta condición de decrecimiento, y por lo tanto intentaríamos considerar la compactificación $\widehat{L}$ de $L = R_s$. Pero de (2.2) (ver Proposición 2.6.3) se tiene que $G_s(u)$ es singular en $u = 0$, y por lo tanto no podemos compactificar L. Ahora bien, el problema es generado por $\log \frac{1}{u}$ el cual aparece en la estimación 2.2. Dado que esto no depende de s, para eliminar la singularidad, podemos considerar el nuevo operador

$$L = R_s - R_a$$

para $a > s \geq 2$. Efectivamente en este caso eliminamos la singularidad, y además tenemos un kernel $k(u) = G_a(u) - G_s(u)$ suave que tiene un decrecimiento según lo pedido en la Observación 2.6.2. Veamos ahora que el rango sigue siendo denso, tal como en el caso de nuestra primera elección de L. Para esto, notamos que podemos escribir

$$L = R_s - R_a = (s(1-s) - a(1-a))R_s R_a.$$

Para ver esto último, como

$$I-(\Delta-s(s-1))R_a = [(\Delta-a(1-a))-(\Delta-s(s-1))]R_a = (s(1-s)-a(1-a))R_a$$

podemos aplicar R_s a ambos lados de la ecuación y obtener lo deseado. Sea $f \in \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Escribiendo

$$g = (s(1-s) - a(1-a))^{-1}(\Delta + a(1-a))(\Delta + s(1-s))f \in \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$$

se tiene que $Lg = f$. Además, si $f \in \mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, luego $g \in \mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, y entonces por el Corolario 2.6.1, también tenemos que $\widehat{L}g = f$. Por lo tanto, el subespacio $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ está en el rango de $\widehat{L}$, y como $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ es denso en $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, se tiene que el rango de $\widehat{L}$ es denso en $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

De lo anterior, mas el teorema de Hilbert-Schmidt, se desprende la siguiente proposición.

Proposición 2.6.5. *Sea $L : \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \to \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ el operador integral definido por $L = R_s - R_a$. Entonces L lleva el subespacio $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ densamente en si mismo, donde este tiene espectro puramente puntual. Sea $\{u_j\}_{j\geq 1}$ un sistema ortonormal de funciones propias de L en $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Luego, toda $f \in \mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ tiene la expansión*

$$f(z) = \sum_{j\geq 1} \langle f, u_j \rangle u_j(z)$$

la cual converge uniforme y absolutamente sobre compactos.

Afirmamos que el conjunto de funciones propias de $\widehat{L}$, $\{u_j\}_{j\geq 1}$, es también un conjunto de funciones propias de Δ. En efecto, sea E_λ el espacio propio de $\widehat{L}$. Del Teorema de Hilbert-Schmidt, estos espacios son finito dimensionales. Como Δ y $\widehat{L}$ comutan (pues $\widehat{L}$ es un operador integral, ver Proposición 2.6.1), tenemos que $\Delta : E_\lambda \to E_\lambda$. Utilizaremos el siguiente resultado del Álgebra Lineal.

Lema 2.6.2. *Sea L un operador simétrico en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$ con espacios propios de dimensión finita. Sea Δ otro operador simétrico en $\mathcal{H}$ el cual conmuta con L. Luego existe un sistema ortonormal maximal de funciones propias de L las cuales son también funciones propias de Δ.*

Demostración. Ver ([11], Corollary A.9, página 188). □

Finalmente, podemos concluir la descomposición espectral de Δ en $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

Teorema 2.6.4. $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ *es generado por funciones propias de Δ. Sea $\{u_j\}_{j\geq 1}$ un sistema ortonormal completo de funciones propias de Δ. Luego, toda $f \in \mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ tiene la expansión*

$$f(z) = \sum_{j\geq 1} \langle f, u_j\rangle u_j(z)$$

la cual converge en la topología inducida por la norma. Si $f \in \mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, entonces la serie converge absoluta y uniformemente sobre compactos.

2.6.3. Series de Eisenstein Incompletas

Sea

$$E_\infty(z|\psi) = \sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma} \psi(\mathrm{Im}\ \gamma z)$$

con $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}$, $\psi \in C_c^\infty(0,\infty)$. Llamamos a esta serie, una serie de Eisenstein incompleta. Notamos que como ψ es de soporte compacto, esta es una serie finita.

Corolario 2.6.2. *Si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ la serie de Eisenstein incompleta es acotada, y por lo tanto $E_\infty(z|\psi) \in L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.*

Denotemos por $\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ el subespacio de $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ generado por las series de Eisenstein incompletas. La primera relación entre dichas series y las formas de Maass cuspidales, se puede descubrir en el siguiente lema.

Lema 2.6.3. *Sea $f(z)$ una función automorfa absolutamente integrable sobre F. Sea $E_\infty(z|\psi)$ una serie de Eisenstein incompleta y $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$. Entonces*

$$\langle f, E_\infty(\cdot|\psi)\rangle = \int_0^\infty f_\infty(y)\overline{\psi}(y)y^{-2}dy \tag{2.5}$$

donde $f_\infty(y)$ es el término constante de la expansión de Fourier de f.

Demostración. Ver [11] página 57-58. □

De este último lema se deduce que f es ortogonal a $\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ si y sólo si $f_\infty(y) = 0$. Recordando la Definición 2.2.1, lo anterior se puede escribir como

$$L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \overline{\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})} \oplus \overline{\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})},$$

ecuación en la cual consideramos las clausuras topológicas con respecto a la norma.

2.6.4. Representación Integral

En esta sección, construiremos una representación integral para las series de Eisenstein incompletas. Partiremos por introducir la Transformada de Mellin. Para $\psi \in \mathbb{C}_c^\infty(\mathbb{R})$, definimos su Transformada de Mellin como la integral

$$\widehat{\psi}(s) := \int_0^\infty \psi(y)y^{-s-1}dy$$

para $s \in \mathbb{C}$. Notamos que como ψ tiene soporte compacto, entonces la integral está bien definida para todo $s \in \mathbb{C}$ y por lo tanto $\widehat{\psi}(s)$ está bien definida para todo número complejo s. La elección de ψ con soporte compacto está tomada en la dirección de relacionar la transformada de Mellin con las series de Eisenstein incompletas.

Lema 2.6.4. *En general, si $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$, se tiene que*

$$\widehat{\psi}(s) \ll (|s| + 1)^{-N}$$

en cualquier banda $\sigma_1 < \mathrm{Re}\ s < \sigma_2$, con $N > 0$.

Demostración. El resultado se sigue haciendo integración por partes N-veces. □

Podemos escribir la *fórmula de inversión de Mellin* (Ver ([15], Exercise 1.4.1, página 61)) dice que

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} y^s \widehat{\psi}(s) ds$$

donde (s) denota que la integral es sobre la recta de parte real igual a un cierto σ. Veamos que no depende de σ. Sean σ_1, σ_2 reales cualquiera y sea T un real positivo. Consideremos la integral de línea

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} y^s M\psi(s) ds$$

donde R denota el rectángulo con vértices $\sigma_1 \pm iT, \sigma_2 \pm iT$. Usando un teorema de Cauchy en Variable Compleja, con la función $s \mapsto y^s \widehat{\psi}(s)$, se tiene que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial R} y^s \widehat{\psi}(s) ds = 0.$$

Sean H_1, H_2 los lados horizontales del rectángulo δR. Usando el Lema 2.6.4 con $N = 2$, se obtiene que

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{H_i} y^s \widehat{\psi}(s) ds \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} y^t C(1 + |t + iT|)^{-2} dt = O\left(y^{\sigma_2} T^{-2}\right).$$

Por lo tanto, haciendo $T \to \infty$, se consigue que las integrales sobre los lados horizontales son nulas. De esta forma se desprende que la integral de la inversion de Mellin, es invariante del σ:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_1)} y^s \widehat{\psi}(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma_2)} y^s \widehat{\psi}(s) ds.$$

Mediante inversión de Mellin, dada ψ como antes, escribir

$$\psi(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \widehat{\psi}(s) y^s ds,$$

para $\sigma > 1$, de manera que si sumamos sobre $\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma$, entonces se obtiene la siguiente representación integral de una serie de Eisenstein incompleta:

$$E_\infty(z|\psi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} E_\infty(z, s) \widehat{\psi}(s) ds,$$

con $\sigma > 1$. Además, por el Lema 2.6.4, $\widehat{\psi}(s) \ll (|s|+1)^{-N}$ en las bandas verticales $\sigma_1 \leq \operatorname{Re} s \leq \sigma_2$ con σ_1, σ_2, N constantes, y por lo tanto, la representación integral de la serie de Eisenstein incompleta, converge absolutamente.

2.6.5. Parte Continua

Consideremos el subespacio $C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ del espacio de Hilbert $L^2(\mathbb{R}^+)$, dotado del producto interno

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty f(r)\overline{g}(r)dr.$$

Definimos la *transformada de Eisenstein*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\infty : C_c^\infty(\mathbb{R}^+) &\to \mathcal{A}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \\ f(r) &\mapsto \frac{1}{4\pi}\int_0^\infty f(r)E_\infty(z, 1/2+ir)dr. \end{aligned}$$

Como las series de Eisenstein satisfacen la cota

$$E_\infty(z,s) = y^s + \varphi(s)y^{1-s} + O(e^{-2\pi y})$$

cuando $y \to \infty$, integrando por partes, se obtiene que $(\mathbf{E}_\infty)f(z) = O(\frac{\sqrt{y}}{\log y})$ cuando $y \to \infty$. Esta cota es suficiente para observar que en realidad

$$\mathbf{E}_\infty : C_0^\infty(\mathbb{R}^+) \subseteq L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}).$$

Proposición 2.6.6. *Dadas dos funciones $f, g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$ se tiene*

$$\langle \mathbf{E}_\infty f, \mathbf{E}_\infty g\rangle = \langle f, g\rangle$$

Demostración. Ver página 96 de [11]. □

Es decir, la transformada de Eisenstein mapea $C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$ isométricamente en $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Denotamos por $\mathcal{E}_\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ la imagen de C_0^∞ bajo la transformada de Eisenstein. Notar que este es un subespacio invariante para el operador de Laplace, pues

$$\Delta\mathbf{E}_\infty = E_\infty M$$

donde

$$(Mf)(r) = (r^2 + \frac{1}{4})f(r).$$

Algunas observaciones con respecto a este espacio son las siguientes ([11], Remark, página 98):

1. $\mathcal{E}_\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ es ortogonal al espacio $\mathcal{C}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

2. $\mathcal{E}_\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ es ortogonal al espacio de funciones constantes.

2.6.6. Descomposición espectral de Δ en $\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$

Partamos primero por observar que es posible conseguir la fórmula

$$\langle E_\infty(\cdot|\psi), E_\infty(\cdot, 1/2+ir)\rangle = \int_0^\infty (y^{1/2-ir} + \varphi(1/2-ir)y^{1/2+ir})\psi(y)y^2 dy$$

para $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^+)$.

Dado que $\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ es generado por series de Eisenstein incompletas $E_\infty(z|\psi)$, basta descomponer $E_\infty(z|\psi)$ para cualquier $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^+)$. De la representación integral para la serie de Eisenstein, obtenemos

$$E_\infty(z|\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\sigma)} \widehat{\psi}(s)E(z,s)ds.$$

Moviendo la integral a la línea Re $s = \frac{1}{2}$ (ver detalles en ([11], Equation 7.12, página 101), obtenemos que

$$E_\infty(z|\psi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{(\frac{1}{2})} \widehat{\psi}(s)E_\infty(z,s)ds + \widehat{\psi}(1)u_0, \tag{2.6}$$

con $u_0 = \sqrt{3/\pi}$. Por otra parte, usando el Lema 2.6.3 se obtiene que

$$\langle E_\infty(\cdot|\psi), E_\infty(\cdot, s)\rangle = \int_0^\infty (y^{1-s} + \varphi(1-s)y^{-s})y^{-2}\psi(y).$$

Recordemos la ecuación funcional

$$E_\infty(z, 1-s) = \varphi(s)E_\infty(z,s).$$

Luego, usando la ecuación funcional, y si multiplicamos esta igualdad por $E_\infty(z,s)$, conseguimos

$$\langle E_\infty(\cdot|\psi), E_\infty(\cdot, s)\rangle E_\infty(z,s) = \widehat{\psi}E_\infty(z,s) + \widehat{\psi}(1-s)E_\infty(z,1-s).$$

Por lo tanto, si integramos sobre la linea Re $s = \frac{1}{2}$, y usando 2.6 obtenemos la expresión

$$\begin{aligned}\frac{1}{4\pi i}\int_{(1/2)}\langle E_\infty(\cdot|\psi), E_\infty(\cdot, s)\rangle E_\infty(z,s)ds &= \frac{1}{2\pi i}\int_{(1/2)}\widehat{\psi}(s)E_\infty(z,s)ds\\ &= E_\infty(z|\psi) - \widehat{\psi}(-1)u_0\end{aligned}$$

Así, de la ortogonalidad entre u_0 y $E_\infty(z, \frac{1}{2} + it)$, se deduce que

$$E_\infty(z|\psi) = \frac{1}{4\pi i}\int_{(1/2)}\langle E_\infty(\cdot|\psi), E_\infty(\cdot, s)\rangle E_\infty(z,s)ds + \langle E_\infty(\cdot|\psi), u_0\rangle u_0.$$

Finalmente el resultado se extiende a funciones $f \in \mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ por linealidad. De esta manera, conseguimos el teorema

Teorema 2.6.5. *El espacio $\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ de series de Eisenstein incompletas, se descompone ortogonalmente en subespacios Δ-invariantes:*

$$\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) = \langle 1\rangle \oplus \mathcal{E}_\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H}).$$

Toda $f \in \mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ tiene la expansión

$$f(z) = \langle f, u_0\rangle u_0(z) + \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}\langle f, E_\infty(\cdot, \frac{1}{2} + ir)\rangle E_\infty(z, \frac{1}{2} + ir)dr,$$

la cual converge en la topología de la norma, y si f pertenece al dominio inicial $\mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, la expansión anterior converge puntual, absoluta y uniformemente, en compactos.

Capítulo 3

Equidistribución de Puntos de Hecke

3.1. Introducción

En este capítulo tendremos el primer acercamiento al objetivo de esta tesis, es decir, el *problema de Equidistribución de Puntos de Hecke*. Más precisamente, probaremos el siguiente teorema

Teorema 3.1.1. *1. Para toda función $f \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ y todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $C_\varepsilon > 0$, tal que*

$$\left\| \frac{1}{\sigma(n)} T_n f - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})} \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f d\mu \right\| \leq C_\varepsilon n^{\frac{7}{64} - \frac{1}{2} + \varepsilon} \|f\|,$$

donde $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$ y la norma involucrada es definida por:

$$\|f\|^2 = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} |f|^2 d\mu$$

y $d\mu = \frac{dxdy}{y^2}$. En particular, se tiene una convergencia en el sentido de $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H}, \mu)$, cuando $n \to \infty$. La constante C_ε depende sólo de ε.

2. Para toda función $f \in \mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, todo $z \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$ y todo $\varepsilon > 0$, existe una constante $C_{\varepsilon,z,f}$ tal que

$$\left| \frac{1}{\sigma(n)} T_n f(z) - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})} \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(w) d\mu(w) \right| \leq C_{\varepsilon,z,f} n^{-\frac{1}{2} + \frac{7}{64} + \varepsilon}.$$

Además, si $z \in K$ un compacto, la constante $C_{\varepsilon,z,f}$ puede ser tomada independiente de z.

3. *Sea $C_0(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ es el espacio de las funciones continuas tendiendo a 0 en el infinito. Para toda $f \in C_0(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ y toda $z \in \Gamma\backslash\mathbb{H}$, tenemos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sigma(n)} T_n f(z) = \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})} \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f(w)d\mu(w). \tag{3.1}$$

Esta convergencia es uniforme sobre los compactos.

En esta dirección, utilizamos en gran medida el Teorema 2.6.1, y la demostración se hace siguiendo principalmente la sección 2 del paper *Equidistribution des points de Hecke*, "*Le cas classique*"(ver [5], página 197).

Como bien dijimos en el párrafo anterior, será útil el hecho de que toda función f se descompone como una suma $g+h$ donde g está en el espectro discreto y h en el continuo. En consecuencia, dado que el problema parte por estudiar las imágenes $\{T_n f\}_{n\in\mathbb{N}}$, será importante estudiar los valores propios de los operadores de Hecke, en el sentido de tener buenas estimaciones. Partiremos entonces por estudiar la acción de los operadores de Hecke sobre formas de Maass.

3.2. Operadores de Hecke sobre formas de Maass

Consideremos el operador de Hecke actuando sobre formas de Maass:

$$\begin{aligned} T_n : \mathcal{A}_s(\Gamma\backslash\mathbb{H}) &\to \mathcal{A}_s(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \\ f(z) &\mapsto (T_n f)(z) = \sum_{ad=n} \sum_{b \bmod d} f\left(\frac{az+b}{d}\right). \end{aligned}$$

Observación 3.2.1. Ya que los operadores de Hecke conmutan con el laplaciano Δ, se tiene para toda $f \in \mathcal{A}_s(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ la implicación $\Delta f = \lambda f \Rightarrow \Delta T_n f = \lambda T_n f$. De esto se concluye que $T_n f \in \mathcal{A}_s(\Gamma\backslash\mathbb{H})$.

Partiremos por ver como actúan los operadores de Hecke sobre las series de Eisenstein.

Proposición 3.2.1. *La serie de Eisenstein $E_\infty(z,s)$ es una función propia para los operadores de Hecke. El valor propio correspondiente a T_n es $n^s\sigma_{1-2s}(n)$, donde*

$$\sigma_s(n) := \sum_{ad=n} d^s.$$

Demostración. Primero notemos que si $f(z) = y^s$, con $y = \text{Im } z$, entonces

$$\begin{aligned} T_n y^s &= \sum_{ad=n} \sum_{b \text{ mód } d} \left(\frac{ay}{d}\right)^s \\ &= \sum_{ad=n} \frac{n^s}{d^{2s-1}} y^s \\ &= n^s \sum_{ad=n} d^{1-2s} y^s. \end{aligned}$$

De esta manera, si denotamos por y a la parte imaginaria de $\gamma.z$, con $\gamma \in \Gamma_\infty \backslash \Gamma$, el resultado es el mismo. Finalmente, el enunciado se deduce utilizando la linealidad de T_n. □

Veamos ahora como actúan sobre formas de Maass cuspidales. Sea E_j el espacio propio de formas de Maass cuspidales asociado a un valor propio $\lambda_j = s_j(1-s_j)$. Notamos que

$$T_n(E_j) \subseteq E_j.$$

En efecto, sea $f \in E_j$, es decir $\Delta f = \lambda_j f$. Como Δ y T_n conmutan, se tiene que

$$\Delta T_n f = T_n \Delta f = T_n \lambda_j f = \lambda_j T_n f,$$

es decir, $T_n f \in E_j$. Así, si λ_j tiene multiplicidad 1 (es decir, $\dim E_j = 1$) entonces una forma de Maass cuspidal $u_j(z)$ con valor propio λ_j es automáticamente una función propia para todos los operadores de Hecke T_n. Por tanto podemos escribir

$$T_n u_j(z) = \widetilde{\lambda}_j(n) u_j(z)$$

para ciertos $\widetilde{\lambda}_j(n)$. Si λ_j no tuviese multiplicidad 1, entonces igualmente esta propiedad puede ser asegurada aplicando el Lema 2.6.2 a la familia compuesta por Δ y todos los operadores T_n, de donde se consigue el siguiente teorema.

Teorema 3.2.1. *Existe un sistema completo ortonormal en el espacio de las formas de Maass cuspidales, el cual consiste de funciones propias comunes para todos los operadores de Hecke.*

Escojamos una base ortonormal $\{u_j(z)\}_{j\geq 1}$ de $C(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ como lo indica el teorema anterior. Luego

$$\begin{gathered}(\Delta - \lambda_j)u_j(z) = 0\\ T_n u_j(z) = n^{1/2}\lambda_j(n)u_j(z) \quad n \geq 1\\ \text{y} \quad \langle u_j, u_k\rangle = \delta_{jk},\end{gathered}$$

donde hemos definido $\lambda_j(n) = \widetilde{\lambda_j}(n)n^{1/2}$. Veamos ahora como actúa T_n sobre los coeficientes de Fourier de $u_j(z)$. Sea

$$u_j(z) = \sum_{m\neq 0} a_j(m)W_{s_j}(mz).$$

Notamos que

$$\begin{aligned}T_n u_j(z) &= \sum_{m\neq 0} a_j(m)T_n W_{s_j}(mz)\\ &= \sum_{m\neq 0} a_j(m) \sum_{ad=n} \sum_{b \text{ mód } d} W_{s_j}\left(m\frac{az+b}{d}\right)\\ &= \sum_{m\neq 0} a_j(m) \sum_{\substack{ad=n\\ d|m}} dW_{s_j}\left(\frac{amz}{d}\right)\\ &= \sum_{k\neq 0} W_{s_j}(kz) \sum_{\delta|(k,n)} a_j\left(\frac{mn}{\delta^2}\right)\frac{n}{\delta}\end{aligned}$$

y como $T_n u_j = n^{1/2}\lambda_j(n)u_j$, se deduce que

$$n^{1/2}\lambda_j(n)a_j(m) = n \sum_{d|(m,n)} a_j\left(\frac{mn}{d^2}\right)\frac{1}{d}.$$

Sea $\sqrt{|m|}a_j(m) =: \rho_j(m)$. Luego

$$\lambda_j(n)\rho_j(m) = \sum_{d|(m,n)} \rho_j\left(\frac{mn}{d^2}\right). \tag{3.2}$$

En particular, para $m = 1$ se tiene que

$$\rho_j(n) = \lambda_j(n)\rho_j(1) \tag{3.3}$$

y de aquí se deduce que $\rho_j(1) \neq 0, \lambda_j(1) = 1$. Reemplazando (3.3) en (3.2), se obtiene el siguiente teorema.

Teorema 3.2.2. *Si $\lambda_j(n)$ son valores propios normalizados de los operadores de Hecke T_n para una forma cuspidal propia común $u_j(z)$, entonces*

$$\lambda_j(m)\lambda_j(n) = \sum_{d|(m,n)} \lambda_j\left(\frac{mn}{d^2}\right).$$

3.3. Estimaciones de Valores Propios

Dado que los T_n son operadores autoadjuntos, se tiene que todos los valores propios $\lambda_j(n)$ son reales. Ahora bien, como las series de Eisenstein son funciones propias para los operadores de Hecke, consideremos la serie en particular con $s = \frac{1}{2} + it$. Por la Proposición 3.2.1 se tiene que, si normalizamos el valor propio asociado a esta serie de Eisenstein por el factor $n^{1/2}$, entonces $n^{1/2}n^{it}\sigma_{-2it}(n) =: n^{1/2}\eta_t(n)$ y

$$\eta_t = n^{it}\sum_{ad=n} d^{-2it} = \sum_{ad=n}\left(\frac{a}{d}\right)^{it},$$

el cual claramente cumple con

$$|\eta_t| \leq \sum_{ad=n}\left|\left(\frac{a}{d}\right)^{it}\right| = \sum_{ad=n} 1 = d(n),$$

donde

$$d(n) := \sum_{d|n} 1.$$

De hecho, la conjetura de Ramanujan-Petersson establece que

$$|\lambda_j(n)| \leq d(n),$$

donde $\lambda_j(n)$ son los valores propios que hemos considerado hasta ahora. Lamentablemente esto sigue a nivel de conjetura. Sin embargo, se han podido probar algunas estimaciones. Por ejemplo, en [14] aparece que

$$\lambda_j(n) \leq d(n)n^{1/5},$$

Mientras que en las notas de Iwaniec, se consigue la potencia 1/4 (ver [10]). Tiempo después, Bump, Duke, Hoffstein, Iwaniec, en [4] probaron que el exponente puede bajarse a 5/28. Finalmente Kim y Sarnak, cambiaron el exponente 5/28 por 7/64 (ver [12]).

Dado que en las estimaciones anteriores está involucrada la función $d(n)$, no está demás tener alguna cota para dicha función. Para esto, consideremos el siguiente hecho.

Lema 3.3.1. *Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ una función multiplicativa tal que $f(p^k) \to 0$, cuando $p^k \to \infty$. Luego $f(n) \to 0$ cuando $n \to \infty$.*

Demostración. Notamos que la hipótesis $f(p^k) \to 0$, cuando $p^k \to \infty$ quiere decir que dado $\varepsilon > 0$, existe una constante $K > 0$ tal que para todo primo p y entero positivo k que cumple $p^k > K$, satisface $|f(p^k)| < \varepsilon$. Afirmamos que f es acotada. En efecto, sea

$$n = \prod_{\substack{p^k \| n \\ p^k \leq K}} p^k \prod_{\substack{p^k \| n \\ p^k > K}} p^k =: n_1 n_2.$$

Como f es multiplicativa, se tiene que $|f(n_2)| < \varepsilon$. Sea $M := \max_{p^k \leq K} |f(p^k)|$, y por lo tanto $|f(n)| = |f(n_1)||f(n_2)| < M^K \varepsilon$ de donde se tiene que f es acotada. Finalmente, sea $R = \sup |f(n)|$. Si escribimos $n = n_1 n_2$. Como antes, entonces $|f(n)| < R\varepsilon$, y por lo tanto se deduce el enunciado.

□

De esto se desprende que, para todo $\varepsilon > 0$, $d(n) = O(n^\varepsilon)$. En efecto, para cada $\varepsilon > 0$, consideremos la función $f_\varepsilon(n) := \frac{d(n)}{n^\varepsilon}$, y notamos que para cada $\alpha \in \mathbb{N}$, se tiene que $d(p^\alpha) = \alpha + 1$. Luego $f(p^\alpha) = \frac{\alpha+1}{p^{\alpha\varepsilon}}$ y por lo tanto es claro que $f(p^\alpha) \to 0$ cuando $p^\alpha \to \infty$. De esta forma se concluye que la función es acotada, es decir, $d(n) \leq k_\varepsilon n^\epsilon$.

Por otra parte, hay una cota para los coeficientes de una forma de Maass cuspidal, llamada la cota trivial:

Proposición 3.3.1. *Sean a_n los coeficientes en la expansión de Fourier de una forma de de Maass cuspidal. Luego,*

$$a(n) = O(|n|^{1/2}).$$

Demostración. Sea f una forma de Maass cuspidal. Escribiendo su expansion en series

$$f(z) = \sum_{n \neq 0} a_n \sqrt{y} K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)e^{2\pi n x}.$$

Luego,

$$a_n\sqrt{y}K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y) = \int_0^1 f(x+iy)e^{-2\pi nx}dx,$$

y como f es acotada, entonces existe una constante $M > 0$ tal que

$$|a_n K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi|n|y)| \leq My^{-1/2}.$$

Finalmente el enunciado se deduce después de tomar $y = \frac{c}{|n|}$, donde c es tal que $K_{s-\frac{1}{2}}(2\pi c) \neq 0$. □

De esta cota se deduce la siguiente estimación sobre valores propios: para todo j, existe constante $C_j > 0$ tal que

$$\lambda_j(n) \leq C_j n,$$

para todo $n \geq 1$. Lamentablemente esta cota no es suficiente para probar la equidistribución de puntos de Hecke. Asumiremos entonces la mejor de las cotas anteriormente expuestas:

$$\lambda_j(n) \leq d(n)n^{\frac{7}{64}}.$$

3.4. Demostración del Teorema 3.1.1

La demostración de la equidistribución usa fuertemente la descomposición espectral de $L^2(\Gamma \setminus \mathbb{H})$ en la parte continua y discreta del Laplaciano, las cuales fueron desarrolladas en el capítulo anterior. Es decir, podemos escribir f según su descomposición espectral, como

$$f(z) = \sum_{j\geq 0}\langle f, u_j\rangle u_j(z) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\langle f, E_\infty(z, \frac{1}{2}+it)\rangle E_\infty\left(z, \frac{1}{2}+it\right)dt.$$

Además, recordemos que de la última sección, tenemos la siguiente cota para los valores propios de los operadores de Hecke:

$$|\lambda_j(n)| \leq d(n)n^{\frac{7}{64}}.$$

Notamos que si f es constante, entonces $T_n f = \sigma(n)$ y

$$\frac{Tnf}{\sigma(n)} - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f d\mu = 0.$$

Por lo tanto, el Teorema 3.1.1 es trivial en este caso. Partamos entonces por demostrar resultados para las funciones en la parte discreta y para funciones en la parte continua.

Lema 3.4.1. *Para todo $j \geq 1$ y todo z*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n u_j(z)}{\sigma(n)} = 0 = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} u_j(z) d\mu$$

Demostración. Como las formas de Maass cuspidales, son ortogonales a las constantes, se tiene que $\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} u_j d\mu = 0$. Por otro lado, como u_j es función propia para todos los operadores de Hecke, entonces escribimos

$$T_n u_j = n^{1/2} \lambda_j(n) u_j.$$

Usando que $\sigma(n) = \sum_{d|n} d \geq n$ y $d(n) = O(n^{\varepsilon})$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{T_n u_j(z)}{\sigma(n)} \right| &= \left| \frac{n^{1/2}\lambda_j}{\sigma(n)} u_j(z) \right| \\
&\leq \frac{n^{1/2} k_\varepsilon n^{\varepsilon+7/64}}{n} |u_j(z)| \\
&\leq k_\varepsilon n^{\varepsilon+\frac{7}{64}-\frac{1}{2}} |u_j(z)|
\end{aligned}$$

lo cual tiende a 0 cuando $n \to \infty$. □

Lema 3.4.2. *Sea f una función en $\mathcal{E}(\Gamma\backslash\mathbb{H}) \cap \mathcal{D}(\Gamma \setminus \mathbb{H})$. Luego*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{T_n f(z)}{\sigma(n)} = 0 = \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f d\mu.$$

Demostración. En este caso, podemos escribir

$$f(z) = \int_{\mathbb{R}} h(t) E_\infty \left(z, \frac{1}{2} + it \right) dt$$

con $h(t) = \frac{1}{4\pi}\langle f, E_\infty(\frac{1}{2} + it)\rangle$. También recordamos que f es ortogonal a las funciones constantes, de donde se deduce que su integral es 0. Además,

$$T_n E_\infty(z, s) = n^s \sigma_{1-2s}(n) E_\infty(z, s)$$

y como $d(n) = O_\varepsilon(n^\varepsilon)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\left|\frac{T_n f(z)}{\sigma(n)}\right| &\leq \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} |\sigma_{-2it}(n) n^{\frac{1}{2}+it} h(t) E_\infty\left(z, \frac{1}{2}+it\right)|dt \\ &\leq \frac{n^{\frac{1}{2}}}{n}\int_{\mathbb{R}} d(n)|h(t)E_\infty\left(z, \frac{1}{2}+it\right)|dt \\ &\leq k_\varepsilon n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\int_{\mathbb{R}} \left|h(t)E_\infty(z, \frac{1}{2}+it)\right| dt\end{aligned}$$

con $\varepsilon > 0$. Escogiendo $\varepsilon < \frac{1}{2}$, se deduce que esto último tiende a 0, cuando $n \to \infty$. □

Demostremos ahora el Teorema 3.1.1.

Demostración. 1. Sea $f \in C^\infty(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ y $\varepsilon > 0$. Estudiemos la diferencia

$$\left\|\frac{T_n f(z)}{\sigma(n)} - \frac{1}{\operatorname{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f d\mu\right\|. \tag{3.4}$$

Sea $u_0 = \sqrt{\frac{3}{\pi}}$. Entonces

$$\begin{aligned} T_n(\langle f, u_0\rangle u_0) &= \sum_{ad=n}\sum_{b \text{ mód } d}\langle f, u_0\rangle u_0 \\ &= \langle f, u_0\rangle u_0 \sigma(n) \\ &= \sigma(n)\sqrt{\frac{3}{\pi}}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f\sqrt{\frac{3}{\pi}} d\mu \\ &= \frac{\sigma(n)}{\operatorname{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f d\mu \end{aligned}$$

luego (3.4) es igual a

$$\left\|\sum_{j\geq 1}\frac{\langle f, u_j\rangle n^{1/2}\lambda_j(n) u_j}{\sigma(n)} + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sigma(n)}\int_{\mathbb{R}} h(t) n^{it}\sigma_{-2it}(n) E_\infty(z, \frac{1}{2}+it)dt\right\| =: \|g_n\|.$$

Por el Teorema 2.6.1

$$\begin{aligned}
\|g_n\|^2 &= \frac{n}{\sigma(n)^2}\sum_{j\geq 1}|\langle f,u_j\rangle|^2\lambda_j(n)^2 + \frac{1}{4\pi}\frac{n}{\sigma(n)^2}\int_{\mathbb{R}}|\langle f,E_\infty(\cdot,\frac{1}{2}+it)\rangle|^2|\sigma_{-2it}(n)|^2dt\\
&\leq \frac{n}{\sigma(n)^2}\left(\sum_{j\geq 1}|\langle f,u_j\rangle|^2k_\varepsilon^2 n^{2\varepsilon}n^{2\cdot\frac{7}{64}} + \frac{k_\varepsilon^2 n^{2\varepsilon}}{4\pi}\int_{\mathbb{R}}|\langle f,E_\infty(\cdot,\frac{1}{2}+it)\rangle|^2|dt\right)\\
&\leq k_\varepsilon^2 n^{-1+2\varepsilon+2\cdot\frac{7}{64}}\|f\|^2
\end{aligned}$$

de donde se desprende que (3.4) es menor o igual a $k_\varepsilon n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon+\frac{7}{64}}\|f\|$, y por lo tanto concluímos la primera parte del teorema.

2. Sea $f\in\mathcal{D}(\Gamma\setminus\mathbb{H})$ y fijemos $z\in\Gamma\setminus\mathbb{H}$. Notamos que

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{T_nf(z)}{\sigma(n)} - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f\,d\mu\right|\\
&= \left|\sum_{j\geq 1}\frac{\langle f,u_j\rangle n^{\frac{1}{2}}\lambda_j(n)}{\sigma(n)}u_j(z) + \frac{n^{\frac{1}{2}}}{\sigma(n)}\int_{\mathbb{R}}h(t)n^{it}\sigma_{-2it}(n)E_\infty(z,\frac{1}{2}+it)dt\right|\\
&\leq \sum_{j\geq 1}|\langle f,u_j\rangle|k_\varepsilon n^{\frac{7}{64}-\frac{1}{2}+\varepsilon}|u_j(z)| + k_\varepsilon n^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\int_{\mathbb{R}}|h(t)E_\infty(z,\frac{1}{2}+it)|dt\\
&\leq k_\varepsilon n^{-\frac{7}{64}-\frac{1}{2}+\varepsilon}\left(\sum_{j\geq 1}|\langle f,u_j\rangle u_j(z)| + \int_{\mathbb{R}}|h(t)E_\infty(z,\frac{1}{2}+it)|dt\right)
\end{aligned}$$

definiendo

$$C_{\varepsilon,z,f} := k_\varepsilon\left(\sum_{j\geq 1}|\langle f,u_j\rangle u_j(z)| + \int_{\mathbb{R}}h(t)E_\infty(z,\frac{1}{2}+it)dt\right)\in\mathbb{R}^+$$

se obtiene la desigualdad pedida. Dado que $f\in\mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, la convergencia es uniforme en compactos, luego, si $z\in K$, entonces $C_{\varepsilon,z,f}$ puede ser escogida independiente de z.

3. Finalmente, sea $f\in C_0(\Gamma\backslash\mathbb{H})$. Sea $z\in\Gamma\backslash\mathbb{H}$ y $\varepsilon>0$. De la densidad de $\mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ en $L^2(\Gamma\backslash\mathbb{H})$, podemos encontrar $\phi\in\mathcal{D}(\Gamma\backslash\mathbb{H})$ tal que

$$\sup_{x\in\Gamma\backslash\mathbb{H}}|f(x)-\phi(x)|\leq\varepsilon.$$

En consecuencia con la parte anterior del teorema

$$\left|\frac{T_n}{\sigma(n)}\phi(z) - \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \phi d\mu\right| \leq \varepsilon,$$

para todo n suficientemente grande. Luego,

$$\begin{aligned}&\left|\frac{T_n}{\sigma(n)}f(z) - \frac{T_n}{\sigma(n)}\phi(z)\right| \\ &\leq \left|\frac{T_n f(z)}{\sigma(n)} - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f d\mu\right| + \left|\frac{T_n\phi(z)}{\sigma(n)} - \frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} \phi d\mu\right| + \\ &+ \left|\frac{1}{\mathrm{vol}(\Gamma\backslash\mathbb{H})}\int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} (\phi - f) d\mu\right|.\end{aligned}$$

Notamos que el primer sumando es menor o igual a ε :

$$\left|\frac{T_n}{\sigma(n)}f(z) - \frac{T_n}{\sigma(n)}\phi(z)\right| \leq \frac{1}{\sigma(n)} \sum_{\substack{ad=n \\ b \mod d}} |f-\phi|\left(\frac{az+b}{d}\right) \leq \sup_{x\in\Gamma\backslash\mathbb{H}} |f(x)-g(x)| \leq \varepsilon.$$

Además, es claro que tanto el segundo como el tercer sumando, son menores o iguales que ε. Finalmente, tenemos que para todo n suficientemente grande,

$$\left|\frac{T_n}{\sigma(n)}f(z) - \frac{T_n}{\sigma(n)}\phi(z)\right| \leq 3\varepsilon,$$

de donde se deduce la tercera parte del teorema.

□

Capítulo 4

Equidistribución via Teoría Ergódica

4.1. Introducción

La idea de este capítulo es usar métodos de la Teoría Ergódica para generalizar en cierta medida, el resultado de la Equidistribución de Puntos de Hecke. En la sección 4.3 de este capítulo mostraremos que para Γ y G (por ahora podríamos pensar Γ y G como $SL(2,\mathbb{Z})$ y $SL(2,\mathbb{R})$ respectivamente), una sucesión $\{a_n\}_n \subset \mathrm{Comm}(\Gamma)$ con $\deg a_i \to \infty$, y para todo punto $x \in \Gamma\backslash G$, entonces se tiene que

$$\frac{1}{\deg a_n} \sum_{\gamma \in \Gamma\backslash\Gamma a_n \Gamma} f(\gamma x) \to \int_{\Gamma\backslash G} f d\mu_G \tag{4.1}$$

donde μ_G en este caso es la medida de Haar normalizada, y f es una función adecuada.

Si volvemos a mirar el Capítulo 3, observamos que nuestro problema es en escencia estudiar convergencias del estilo anterior: en dicho capítulo debíamos mostrar que

$$\frac{1}{\sigma(n)} T_n f \text{ converge a } \int_{\Gamma\backslash\mathbb{H}} f d\mu_0$$

(atención, acá la medida μ_0 es la medida μ sobre $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ normalizada).

Observación 4.1.1. Para ser mas estrictos, hay varios apuntes que hacer antes de pensar en una equivalencia con el problema del Capítulo 3. Acá directamente colocamos $G = SL(2,\mathbb{R})$ y $\Gamma = SL(2,\mathbb{Z})$.

- La integral de la derecha en (4.1) está sobre $\Gamma\backslash G$ y no sobre $\Gamma\backslash\mathbb{H}$ tal como en (3.1). Para ver esto, consideramos la acción de G sobre el semiplano superior de Poincaré, definida por
$$G \times \mathbb{H} \ni \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, z \right) \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \in \mathbb{H}.$$
Es conocido que esta acción es transitiva, en particular, la órbita de i es $\mathbb{H}$. Por lo tanto ocupando el Teorema de Órbita-Estabilizador, se deduce que hay una biyección
$$SL(2,\mathbb{R})/\mathrm{Stab}_{SL(2,\mathbb{R})}(i) \to \mathbb{H}$$
la cual induce una biyección
$$\Gamma\backslash SL(2,\mathbb{R})/SO(2,\mathbb{R}) \to \Gamma\backslash\mathbb{H},$$
pues $\mathrm{Stab}_{SL(2,\mathbb{R})}(i) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} : a^2+b^2 = 1 \right\} \cong SO(2,\mathbb{R})$.
- Recordar que en el caso del Capítulo 3, las clases básicamentes están caracterizadas por su determinante, digamos n, para todo $n \in \mathbb{N}$. De esta forma, estamos pensando en clases de la forma $\Gamma a_n \Gamma$, donde $\det a_n = n$. Recordemos que de la Proposición 1.6.2 $\deg a_n = \sigma(n)$ de manera que la normalización $\sigma(n)$ no era arbitraria.

Establezcamos el caso general. Sea $G = SL(n,\mathbb{R})$, y sea Γ un *subgrupo arimético* de G (ver Definición 4.2.3). Volvamos ahora al caso mas general. Para cada n, sea $V_n = \Gamma\backslash\Gamma a_n \Gamma$. Si $x \in \Gamma\backslash G$ podemos considerar una medida $\delta^x_{V_n}$ definida por
$$\delta^x_{V_n} = \frac{1}{\# V_n} \sum_{y \in V_n} \delta_{yx}$$
y por lo tanto si $x = \Gamma e$, nuestro problema se pueden entender desde el punto de vista de la equidistribución: *la sucesión V_n se equidistribuye con respecto a la medida μ_G*. Sin embargo, el objetivo primordial es demostrar que para todo $x \in \Gamma\backslash G$, $\delta^x_{V_n} \to \mu_G$.

De esta manera, necesitamos estudiar límites débiles de medidas en algún conjunto adecuado de éstas. Antes de estudiar esto, necesitamos considerar nociones de grupos algebraicos y herramientas de la Teoría Ergódica que nos permitirán estudiar dichas convergencias.

4.2. Grupos Algebraicos

Sean $k \subset K$ cuerpos con K algebraicamente cerrado, y supongamos que tienen característica 0. Recordemos que una variedad afín se entiende por un subconjunto $V \subset K^n$ el cual es el conjunto de ceros de algún ideal de polinomios en $K[x_1, \ldots, x_n]$. También decimos que V es definido sobre k, o que es una k-variedad afín si V es el conjunto de ceros de un ideal de polinomios con coeficientes en k. Las $(k-)$ variedades afines contenidas en V son los subconjuntos cerrados de una topología en V, llamada la (k-) topología de Zariski. Si miramos una matriz de $n \times n$ con coeficientes en K como una función de las entradas de la matriz, es decir en n^2 variables, se tiene que $GL(n, K)$ es un abierto en K^{n^2}.

Definición 4.2.1. Un $(k-)$ grupo algebraico es un subgrupo de $GL(n, K)$ el cual es $(k-)$ Zariski cerrado.

Ejemplo. $SL(n, K)$ es un $\mathbb{Q}$-grupo algebraico (recordar que como $\mathrm{char}K = 0$, entonces $\mathbb{Q} \subset K$).

Proposición 4.2.1. *Sea K un cuerpo. Supongamos que $G \subset GL(n, K)$ es un grupo algebraico y que $G(k) := G \cap GL(n, k)$ es un Zariski denso en G para algún subcuerpo $k \subset K$. Entonces G es definido sobre k.*

Demostración. Sea

$$I_d = \{\text{polinomios de grado menor o igual a } d \text{ anulando a } G\}.$$

Como $G \cap GL(n, k)$ es Zariski denso en G, un polinomio p de grado $\leq d$ está en I_d si y sólo si $p(g) = 0$ para todo $g \in G \cap GL(n, k)$. Podemos considerar estas anulaciones como un sistema homogéneo de ecuaciones lineales, una ecuación por cada $g \in G \cap GL(n, k)$ donde las ecuaciones son los r coeficientes de las ecuaciones que están en k. Dado que hay r incógnitas, podemos encontrar r de estas ecuaciones tal que las soluciones del sistema original son las mismas que las soluciones de este sistema. Pero el kernel de una matriz de $r \times r$ con coeficientes en k considerado como una transformación lineal sobre K^r tiene una base de elementos en k^r. Así, I_d tiene una base de elementos con coeficientes en k, y dado que esto es verdad para todo d, es claro que G es definido sobre k. $\square$

Definición 4.2.2. Si G es un k-grupo, G es llamado k-simple si todo k-subgrupo propio normal es trivial.

Los siguientes resultados serán importantes en la demostración del problema.

Proposición 4.2.2. *Sea G un grupo $\mathbb{Q}$-simple. Luego todo subgrupo de $G\times G$, definido sobre $\mathbb{Q}$ conteniendo a la diagonal $\Delta(G) := \{(g,g) : g \in G\}$, es $G\times G$ o $\Delta(G)$.*

Demostración. Supongamos que G' es un subgrupo de $G \times G$, definido sobre $\mathbb{Q}$, conteniendo a $\Delta(G)$. Sean $\pi_i : G \times G \to G, i = 1, 2$ las proyecciones a la primera y segunda coordenada respectivamente. Notamos que ambos son definidos sobre $\mathbb{Q}$ pues son polinomios con coeficientes racionales, entonces $\ker \pi_i$ es una $\mathbb{Q}$-variedad. Además, como G' contiene a la diagonal se tiene que $\pi_i(G') = G, i = 1, 2$.

Sea $H := G' \cap \ker \pi_2$. Como $\ker \pi_2$ y G' son definidos sobre $\mathbb{Q}$, entonces H también lo es, y además notamos que H es normalizado por $\Delta(G)$. Para ver esto último, observemos que

$$(g,g)H(g^{-1},g^{-1}) = (g,g)G'(g^{-1},g^{-1})\cap(g,g)\ker\pi_2(g^{-1},g^{-1}) \subset G'\cap\ker\pi_2 = H$$

donde la primera contención se produce pues $\Delta(G) \subset G' \Rightarrow (g,g)G'(g^{-1},g^{-1}) \subset G'$ y por el hecho de que

$$(g,g)\ker\pi_2(g^{-1},g^{-1}) = \big\{(gag^{-1},e) : a \in G\big\} \subset \ker\pi_2.$$

Así, hemos construido un subgrupo normal H de $G \times G$ definido sobre $\mathbb{Q}$. Ahora bien, notamos que la imagen $\pi_1(H)$ también es un subgrupo normal definido sobre $\mathbb{Q}$. Como G es $\mathbb{Q}$-simple, entonces $\pi_1(H)$ o bien es G o bien es $\{e\}$. Veamos cada caso:

- Si $\pi_1(H) = \{e\}$, entonces $H = G' \cap \ker\pi_2 \subset \{(e,g) : g \in G\}$. Por otra parte $G' \cap \ker\pi_2 \subset \ker\pi_2 = \{(g,e) : g \in G\}$, de donde se desprende que $G' \cap \ker\pi_2 = (e,e)$. De esto se concluye que $G' = \Delta(G)$, pues si $(a,b) \in G'$, como $\Delta(G) \subset G'$ entonces $(b^{-1},b^{-1}) \in G'$, de donde se deduce que $(ab^{-1},e) \in G'$, elemento que al mismo tiempo pertenece a $\ker\pi_2$. Así $(ab^{-1},e) = (e,e)$, y por lo tanto $a = b$. En consecuencia $G' = \Delta(G)$.
- Si $\pi_1(H) = G$, entonces existe $a \in G$ tal que

$$\{(g,a) : g \in G\} \subset H.$$

Por otro lado, $H = G' \cap \ker \pi_2 \subset \{(g, e) : g \in G\}$ por lo cual $a = e$, y $G' \cap \ker \pi_2 = \{(g, e) : g \in G\} = \ker \pi_2$. Como $\ker \pi_2 \subset G'$, necesariamente $G' = G \times G$. En efecto, supongamos que hay un $(a, b) \notin G'$. Entonces $(ab^{-1}, e) \notin G'$ (pues de otro modo, si $(ab^{-1}, e) \in G'$ como $\Delta(G) \subset G'$, entonces $(a, b) = (ab^{-1}, e)(b, b) \in G'$ lo cual es una contradicción). Pero $(ab^{-1}, e) \notin G'$ es absurdo dado que $(ab^{-1}, e) \in \ker \pi_2 \subset G'$. Por lo tanto $G' = G \times G$.

□

Sea G un k-grupo algebraico. Sea G° la componente conexa de la identidad en G, es decir, el subgrupo algebraico conexo maximal de G.

Proposición 4.2.3. *G° es un subgrupo normal de índice finito en G. Además, G° es definido sobre k y todo subgrupo algebraico de índice finito en G contiene a G°.*

Demostración. Ver ([2], Proposition 1.2, página 46). □

Observación 4.2.1. De este hecho deducimos lo siguiente: si H es un subgrupo de Zariski denso y F un subgrupo de índice finito en H, entonces la clausura de Zariski de F, $\overline{F}$, contiene a G°.

Usaremos esta observación para probar la siguiente proposición.

Proposición 4.2.4. *Si H_1 y H_2 son dos subgrupos conmensurables de un grupo algebraico conexo G, entonces H_1 es Zariski denso en G si y sólo si H_2 es Zariski denso en G.*

Demostración. Supongamos que H_1 es denso en G. Como H_1, H_2 son conmensurables se tiene que $H_1 \cap H_2$ tiene índice finito en H_1. De la observación (4.2.1) se deduce

$$G^\circ \subset \overline{H_1 \cap H_2} \subset \overline{H_2} \subset G$$

y como G es conexo, se deduce que H_2 es denso. La demostración del otro caso es análoga. □

Definición 4.2.3. Un subgrupo Γ de $G(\mathbb{Q})$ es llamado un subgrupo aritmético si éste es conmensurable con $G(\mathbb{Z}) = G(\mathbb{Q}) \cap GL(n, \mathbb{Z})$.

4.3. Una Generalización del Problema

Ya con todos los preliminares establecidos podemos enunciar una generalización del teorema de la equidistribución de puntos de Hecke.

Teorema 4.3.1. *Sea $G = SL(n, \mathbb{R})$ y sea $\Gamma \subset G(\mathbb{Q})$ un subgrupo aritmético de G. Sea $\{a_i \in \mathrm{Comm}(\Gamma)\}$ una sucesión tal que $\lim_{i\to\infty} \deg(a_i) = \infty$. Entonces, para toda función f continua acotada sobre $\Gamma\backslash G$ y para todo $x \in \Gamma\backslash G$, se tiene que*

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{\deg(a_i)} \sum_{\gamma\in\Gamma\backslash\Gamma a_i\Gamma} f(\gamma x) = \int_{\Gamma\backslash G} f(g)d\mu_G(g),$$

donde μ_G es la medida de Haar normalizada.

4.4. Límites de medidas invariantes

Como hemos discutido antes, dado que la naturaleza del problema implica el estudio de convergencia de medidas, es necesario un resultado precisamente en esa área. Sean G y Γ como en el enunciado del Teorema 4.3.1. Sea $H = \Delta(G) := \{(g, g) : g \in G\}$ la diagonal de G, y sea $\{g_m \in G\}$ una sucesión tal que $g_m^{-1}\Gamma g_m \cap H$ es conmensurable con $\Gamma \cap H$. Es posible demostrar que existe una única medida de probabilidad ν_m en $\Gamma\backslash G$, que sea H-invariante y soportada sobre $\Gamma\backslash\Gamma g_m H$ (ver [7], página 2).

Proposición 4.4.1. *Supongamos que ν_m converge débilmente a una medida ν en $P(\Gamma\backslash G)$ cuando $m \to \infty$. Luego, existe un subgrupo cerrado conexo L de G, conteniendo a H, tal que*

1. *ν es una medida L-invariante soportada sobre $\Gamma\backslash\Gamma c_0 L$ para algún $c_0 \in G$.*
2. *$\Gamma \cap c_0 L c_0^{-1}$ es un lattice Zariski denso en $c_0 L c_0^{-1}$ y en particular $c_0 L c_0^{-1}$ es definido sobre $\mathbb{Q}$.*
3. *Existe $m_0 \in \mathbb{N}$ y una sucesión $\{x_m \in \Gamma g_m H\}$ que converge a c_0 cuando $m \to \infty$ tal que $c_0 L c_0^{-1}$ contiene el subgrupo generado por $\{x_m H x_m^{-1} : m \geq m_0\}$.*

La demostración de este resultado se puede ver en [7].

4.5. Demostración de la Equidistribución

Definición 4.5.1. En general sea X un G-espacio y M un subgrupo de G. Definimos a $P(X)^M$ el espacio de medidas borelianas de probabilidad sobre X, que son M-invariantes.

Para cada $\nu \in P(\Gamma\backslash G)^\Gamma$, se define una nueva medida $\widetilde{\nu}$ sobre $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$ como:

$$\widetilde{v}(f) := \int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} f(g,hg)d\mu_G(g)d\nu(h) \tag{4.2}$$

para cualquier función f acotada sobre $\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G$.

Lema 4.5.1. *Se tiene que $\widetilde{\nu} \in P(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)^{\Delta(G)}$. Además la función*

$$\begin{aligned} P(\Gamma\backslash G)^\Gamma &\to P(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)^{\Delta(G)} \\ \nu &\mapsto \widetilde{\nu} \end{aligned}$$

es un homeomorfismo.

Demostración.

1. $\widetilde{\nu} \in P(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)^{\Delta(G)}$. Sea $\delta_{(l,l)}f(a,b) = f(al,bl)$. Por demostrar que $\widetilde{\nu}(\delta_{(l,l)}f) = \widetilde{\nu}(f)$. Notamos que

$$\widetilde{\nu}(\delta_{(l,l)}f) = \int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} f(gl,hgl)d\mu_G d\nu(h)$$

haciendo el cambio $g \mapsto gl^{-1}, h \mapsto h$, y usando que μ_G es G-invariante se deduce que

$$\widetilde{\nu}(\delta_{(l,l)}f) = \int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} f(gl,hgl)d\mu_G d\nu(h) = \int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} f(g,hg)d\mu_G d\nu(h) = \widetilde{\nu}(f).$$

Por lo tanto $\widetilde{\nu}$ es $\Delta(G)$-invariante.

2. Inyectividad. Sean $\mu, \nu \in P(\Gamma\backslash G)$ tales que $\widetilde{\nu} = \widetilde{\mu}$. Sea $f \in C(\Gamma\backslash G)$. Definamos la función $F(x,y) = f(yx^{-1}) \in C(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)$. Como $\widetilde{\nu} = \widetilde{\mu}$ se tiene que

$$\int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} f(hgg^{-1})d\mu_G(g)d\nu(h) = \int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} f(hgg^{-1})d\mu_G(g)d\mu(h)$$

de donde

$$\int_{\Gamma\backslash G} f(h)d\nu(h) = \int_{\Gamma\backslash G} f(h)d\mu(h)$$

y por lo tanto $\nu = \mu$.

3. Sobreyectividad. Sea $\nu \in P(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)$, y sea $F(x,y) := f(x^{-1}y)$. Sea $\nu_0 \in P(\Gamma\backslash G)$ definida de la siguiente manera
$$\nu_0(f) := \nu(F) = \int_{\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G} f(x^{-1}y) d\nu(x,y).$$
Verifiquemos que ν_0 es Γ-invariante. En efecto, si denotamos por $\delta_h f(y) = f(yh)$ para $h \in \Gamma$, entonces queremos verificar que $\nu_0(\delta_h f) = \nu_0(f)$. Notamos que
$$\begin{aligned} \nu_0(\delta_h f) &= \int_{\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G} f(x^{-1}yh) d\nu(x,y) \\ &= \int_{\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G} f(hx^{-1}y) d\nu(x,y) \qquad (4.3) \\ &= \int_{\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G} f(x^{-1}y) d\nu(x,y) \qquad (4.4) \end{aligned}$$
donde (4.3) se consigue mediante los cambios $x \mapsto xh^{-1}, y \mapsto yh^{-1}$ y (4.4) se cumple pues f es Γ-invariante. Así ν_0 es Γ-invariante. Se afirma que $\widetilde{\nu_0} = \nu$. En efecto, sea $f \in C(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)$, luego
$$\begin{aligned} \widetilde{\nu_0}(f) &= \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} f(g, gh) d\mu_G d\nu_0(h) \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} f_0(h) d\nu_0(h) \qquad \left(f_0(h) := \textstyle\int_{\Gamma\backslash G} f(g, gh) d\mu_G(g) d\nu_0(h)\right) \\ &= \int_{\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G} f_0(x^{-1}y) d\nu(x,y) \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} f(g, gx^{-1}y) d\mu_G(g) d\nu(x,y) \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} f(gx, gy) d\nu(x,y) d\mu_G(g) \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} f(x,y) d\nu(x,y) d\mu_G(g) \qquad (4.5) \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} f(x,y) d\nu(x,y) = \nu(f), \end{aligned}$$
donde (4.5) se cumple puesto que la medida ν es $\Delta(G)$-invariante. Se observa que lo anterior define la función inversa
$$P(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)^{\Delta(G)} \ni \nu \to \nu_0 \in P(\Gamma\backslash G)^{\Gamma}.$$

4. Continuidad (y de la inversa también). Sea $\{\mu_n\}_n \subset P(\Gamma\backslash G)$ una sucesión tal que $\mu_n \to \mu$ y demostremos que $\widetilde{\mu_n} \to \widetilde{\mu}$ cuando $n \to \infty$. Para ver esto, consideremos $f \in C_c(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)$. Entonces

$$\left| \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} f(g, hg) d\mu_G(g) d\mu_n(h) - \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} f(g, hg) d\mu_G(g) d\mu(h) \right| \leq \int_{\Gamma\backslash G} \left| \int_{\Gamma\backslash G} f(g, hg) d\mu_n(h) - \int_{\Gamma\backslash G} f(g, hg) d\mu(h) \right| d\mu_G(g). \tag{4.6}$$

Definiendo

$$W(g) := \int_{\Gamma\backslash G} f(g, hg) d\mu_n(h) - \int_{\Gamma\backslash G} f(g, hg) d\mu(h)$$

se tiene que $W(g)$ es acotado y por lo tanto por convergencia dominada se deduce que el lado izquierdo de la desigualdad (4.6) converge a 0 cuando $n \to \infty$. La continuidad de la inversa se demuestra análogamente.

Por lo tanto la aplicación $\nu \mapsto \widetilde{\nu}$ es un homeomorfismo. □

Lema 4.5.2. *Sea $a \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$. Si denotamos por*

$$\nu_a := \frac{1}{\deg a} \sum_{y \in \Gamma\backslash\Gamma a\Gamma} \delta_y$$

donde δ_y es la medida de Dirac concentrada en y, entonces $\widetilde{\nu}_a$ es la única medida de probabilidad $\Delta(G)$-invariante, soportada sobre

$$[(e, a)]\Delta(G) \subset \Gamma \times \Gamma\backslash G \times G.$$

Acá $[(e, a)]$ denota la clase del punto $(e, a) \in G \times G$, módulo $\Gamma \times \Gamma$.

Demostración. Comencemos por demostrar que ν_a es Γ-invariante. Sea $h \in \Gamma$, luego

$$\nu_a(\delta_h f) = \frac{1}{\deg a} \sum_{y \in \Gamma\backslash\Gamma a\Gamma} f(hy) = \frac{1}{\deg a} \sum_{y \in \Gamma\backslash\Gamma a\Gamma} f(y) = \nu_a(f),$$

y por lo tanto, podemos construir $\widetilde{\nu_a}$. Explícitamente

$$\begin{aligned}\widetilde{\nu_a}(f) &= \int_{\Gamma\backslash G}\int_{\Gamma\backslash G} f(g,hg)d\mu_G(g)d\nu_a(h)\\ &= \frac{1}{\deg a}\sum_{y\in\Gamma\backslash\Gamma a\Gamma}\int_{\Gamma\backslash G} f(g,yg)d\mu_G(g)\end{aligned}$$

la cual es una medida de probabilidad $\Delta(G)$-invariante. Veamos que está soportada sobre $[(e,a)]\Delta(G)$. Para ver esto, consideremos f tal que $\mathrm{supp} f\cap[(e,a)]\Delta(G)=\emptyset$. Luego, para todo $y\in\Gamma\backslash\Gamma a\Gamma$, se tiene que $\mathrm{supp} f\cap[(e,y)]\Delta(G)=\emptyset$, es decir, para todo y

$$\int_{\Gamma\backslash G} f(g,yg)d\mu_G(g)=0$$

de donde se tiene que $\widetilde{\nu_a}(f)=0$. Por lo tanto $\widetilde{\nu_a}$ está soportada sobre $[(e,a)]\Delta(G)$. Notamos que $\widetilde{\nu_a}$ es única, pues ésta es una medida de Haar para el grupo $\Delta(G)$. $\square$

Lema 4.5.3. *Sea $a\in G$. Entonces $a\in\mathrm{Comm}(\Gamma)$ si y sólo si la órbita $[(e,a)]\Delta(G)$ es cerrada y soporta una medida finita $\Delta(G)$-invariate.*

Demostración. Sea $a\in\mathrm{Comm}(\Gamma)$. Por el Lema 4.5.2, se tiene que hay una medida finita $\Delta(G)$-invariante, soportada sobre $[(e,a)]\Delta(G)$. La demostración de que la órbita es cerrada, se encuentra en ([6], Lema 4.1). En la otra dirección, utilizando el Lema 4.5.1, como hay una única medida soportada sobre $[(e,a)]\Delta(G)$, la cual es $\widetilde{\nu_a}$, entonces podemos construir su preimagen dada por $\nu_a=\frac{1}{\deg a}\sum_{y\in\Gamma a\Gamma}\delta_y$. Dado que ν_a es una medida finita, bien definida, no nula, se deduce que $\deg a<\infty$. Por lo tanto $[\Gamma:\Gamma\cap a^{-1}\Gamma a]<\infty$, de donde $[a\Gamma a^{-1}:\Gamma\cap a^{-1}\Gamma a]<\infty$, es decir, $a\in\mathrm{Comm}(\Gamma)$. $\square$

4.5.1. Demostración del Teorema 4.3.1

Sea $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}\subset\mathrm{Comm}(G)$ tal que $\deg a_i\to\infty$. Sea $X=(\Gamma\times\Gamma)\backslash(G\times G)$ y definamos

$$\overline{X}=\begin{cases} X, & \text{si } X \text{ es compacto}\\ X\cup\{\infty\}, & \text{en otro caso.}\end{cases}$$

donde $X\cup\{\infty\}$ es la compactificación por un punto de X. Como $P(\overline{X})$ es compacto con respecto a la topología débil $*$, de los lemas anteriores se deduce que es suficiente mostrar que, asumiendo que la sucesión $\{\widetilde{\nu}_{a_i}\}$ converge a $\widetilde{\nu} \in P(\overline{X})$, entonces $\widetilde{\nu}$ es $G\times G$-invariante y soportada sobre X. Para mostrar que $\widetilde{\nu}$ está soportada sobre X, demostremos que para cada $i, \widetilde{\nu}_{a_i}$ está soportada sobre X. Sea f con soporte compacto, tal que

$$\mathrm{supp} f \cap X = \emptyset.$$

Luego, necesariamente, $f(x) = 0$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, es claro que

$$\int_X f d\widetilde{\nu}_i = 0$$

de donde se tiene que $\widetilde{\nu}$ es soportada sobre X.

Teorema 4.5.1. $\widetilde{\nu} = \mu_G \times \mu_G$.

Demostración. Sean

$$F = \left\{(g, a_i g a_i^{-1}) : g \in \Gamma\right\} = (e, a_i)\Delta(\Gamma)(e, a_i^{-1}),$$

y

$$\widetilde{F} = (e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1}) \cap (\Gamma \times \Gamma).$$

Notemos que $F \cong \Gamma$ y que $\widetilde{F}$ es isomorfo al conjunto de elementos de Γ normalizados por a_i, es decir $\widetilde{F} \cong \Gamma \cap a_i^{-1}\Gamma a_i$. Como $a_i \in \mathrm{Comm}(\Gamma)$ se tiene que $\widetilde{F}$ es conmensurable con F.
Además notemos que F es Zariski denso en $(e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1})$, pues $\Delta(\Gamma)$ es Zariski denso en $\Delta(G)$. Utilizando la Proposición 4.2.4, como F es Zariski denso en $(e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1})$ y F conmensurable con $\widetilde{F}$, entonces $\widetilde{F}$ es Zariski denso en $(e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1})$. Por otra parte, como

$$\widetilde{F} \subset (e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1}) \cap (G \times G)(\mathbb{Q})$$

se deduce que

$$\widetilde{F} \subset (e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1})(\mathbb{Q}).$$

Así, por la Proposición 4.2.1 tenemos que $(e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1})$ es un $\mathbb{Q}$-subgrupo de $G\times G$. Como G es $\mathbb{Q}$-simple, se deduce que los subgrupos $\Delta(G)$ y $(e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1})$ son subgrupos definidos sobre $\mathbb{Q}$ cerrados conexos maximales. En efecto, sea T subgrupo definido sobre $\mathbb{Q}$ tal que $\Delta(G) \subset T$. Por la Proposición 4.2.2, $T = \Delta(G)$, o bien $T = G \times G$. Análogo para $(e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1})$. Por lo tanto, son subgrupos máximales definidos sobre $\mathbb{Q}$. Es claro que ambos son cerrados y conexos. En consecuencia, utilizando la primera parte de la Proposición 4.4.1 con $H = \Delta(G)$, se desprende que $\widetilde{\nu}$ es $G \times G$ invariante o $\Delta(G)$ invariante soportada sobre una órbita $x\Delta(G)$, para algún $x \in X$. El primer caso es el que estabamos buscando y por lo tanto intentamos descartar el segundo. Utilizando la tercera parte de la Proposición 4.4.1, se deduce que existe una sucesión $y_j \in \Gamma \times \Gamma$ y un $i \in \mathbb{N}$ tal que:

$$y_j(e, a_j)\Delta(G)(e, a_j^{-1})y_j^{-1} = (e, a_i)\Delta(G)(e, a_i^{-1})$$

para todo $j \geq i$. Así $(e, a_i^{-1})y_j(e, a_j) \in N_{G\times G}(\Delta(G))$ para todo $j \geq i$. Como $\Delta(G)$ tiene índice finito en su normalizador en $G \times G$, se deduce que $(e, a_i^{-1})y_j(e, a_j) \in \Delta(G)$ para infinitos j. Así, para infinitos $b_j \in \Delta(G)$

$$(e, a_i^{-1})y_j(e, a_j) = b_j \Rightarrow y_j(e, a_j) = (e, a_i)b_j.$$

Pero como $y_j \in \Gamma \times \Gamma$ y $b_j \in \Delta(G)$ de donde se deduce que $[(e, a_j)]\Delta(G) = [(e, a_i)]\Delta(G)$, es decir,

$$(\Gamma \times \Gamma)(e, a_j)\Delta(G) = (\Gamma \times \Gamma)(e, a_i)\Delta(G)$$

para infinitos j, y en consecuencia $\Gamma a_j = \Gamma a_i$ para infinitos j. Lo último implica que $\deg a_j$ es constante para infinitos j, lo cual es una contradicción con el hecho de que $\deg a_j \to \infty$ cuando $j \to \infty$. Por lo tanto, la única opción válida es que $\widetilde{\nu}$ sea $G \times G$ invariante, es decir, la medida de Haar asociada a $G \times G$, de donde se deduce el Teorema.

$\square$

Bibliografía

[1] A. Andrianov and V Zhuravlev. *Modular forms and Hecke operators*. American Mathematical Soc. 6

[2] A. Borel. *Linear Algebraic Groups*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1991. 59

[3] D. Bump. *Automorphic Forms and Representations*. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, 1998. 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 24, 25

[4] D. Bump, W. Duke, J. Hoffstein, and H. Iwaniec. *An estimate for the Hecke eigenvalues of Maass forms*. 4. Duke Math. J. Research Notices, 75-81, 1992. 47

[5] L. Clozel and E. Ullmo. *Equidistribution des points de Hecke*. Contributions to Automorphic Forms, Geometry and Arithmetic (volume en l'honneur de Shalika) p. 193-254. Johns Hopkins University Press, 2004. 3, 44

[6] M. Einsiedler. Ratner's theorem on $sl(2,r)$-invariant measures. `http://www.math.ethz.ch/~einsiedl/omgsur.pdf`. 64

[7] A. Eskin and H. Oh. Ergodic theoretic proof of equidistribution of hecke points. *Erg. The. Dyn. Sys. Vol*, pages 163–167. 3, 60

[8] P. Garabedian. *Partial Differential Equations*. Chelsea Publishing Series. Chelsea Publishing Company, 1986. 31

[9] G. Harder, J.H. Bruinier, G. van der Geer, K. Ranestad, and D. Zagier. *The 1-2-3 of Modular Forms: Lectures at a Summer School in Nordfjordeid, Norway*. Universitext. Springer, 2008. 17, 18

[10] H. Iwaniec. Notes on the spectral theory of automorphic functions, part 1. `http://www.math.rutgers.edu/~bbate/IwaniecNotes/Part1.pdf`, 1987. 47

[11] H. Iwaniec. *Spectral Methods of Automorphic Forms*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, 2002. 26, 28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 37, 38, 40, 41

[12] H. Kim and P. Sarnak. *Appendix 2: Refined estimates towards the Ramanujan and Selberg conjectures*. 16. J. Amer. Math. Soc., 175-181, 2003. 48

[13] Dave Witte Morris. *Ratner's Theorem on Unipotent flows*. Chicago Lecture Series in Math, 2005. 3

[14] M.R. Murty. *On the estimation of eigenvalues of Hecke operators*. 15. Rocky Mountain J. Math., 521-53, 1985. 47

[15] A. Terras. *Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I-II*. Number v. 1 in Harmonic Analysis on Symmetric Spaces and Applications I-II. Springer-Verlag, 1988. 39