Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemática
Departamento de Matemática

Lógica proposicional y de Primer Orden inducida por Matrices Literal-Paracompletas-Paraconsistentes

Por Nicolás Muñoz

Tesis presentada a la Facultad de Matemática de la
Pontificia Universidad Católica de Chile para optar
al grado académico de Magíster en Matemática

Profesor Guía: Irene Fedora Mikenberg Lev

Comisión Informante:
Renato Lewin Riquelme de la Barrera
María Gloria Schwarze Dinstrans

Diciembre 2013
Santiago. Chile

Índice general

Agradecimientos

Esta tesis es producto de un largo trabajo, que no hubiese sido posible sin el aporte de muchas personas. Quisera comenzar agradeciendo a la profesora Irene Mikenberg, que soportó reuniones semanales conmigo por casi por dos años, que aguantó las semanas en que yo llegaba sin haber avanzado nada sobre la Tesis o sobre el ramo de Teoría de Modelos y que me apoyaba constantemente encontrando lindos mis avances de tesis, o la manera particular en que abordaba alguno de los asuntos. En segundo lugar quisiera agradecer al profesor Renato Lewin, quien me tuvo que soportar sólo un semestre con el ramo tutoreado de Lógica Algebráica Abstracta, pero me hizo sufrir preparando la clase dos veces a la semana por casi el semestre completo; y quien es además la razón de que haya revisado cada detalle en las demostraciones varias veces antes de enviar la tesis a ser evaluada. Por supuesto agradezco a los muchos profesores que han participado en mi formación tanto en pregrado como en magíster y al personal administrativo de la facultad de Matemática.

Habiendo cerrado los agradecimientos académicos, quisiera agradecer a quienes me han acompañado en lo personal: a mi familia, amigos, ex-amigos y proto-amigos. Infinito agradecimiento para Felipe, Camila, Isabel, Pancho, Francia, Javiera, Carlos, Sebastián, Lea, Patricio, Nicolás, Tamara, Valeria, Daniela, Rodrigo, Erik, etc. Y no puedo olvidar a aquellos que sin conocerme me ayudaron a superar los momentos más complejos en la tesis: Violeta Parra, Inti-Illimani, Víctor Jara, Compay Segundo, Quilapayún, Rolando Alarcón, Joe Pass, Joe Pug, Thelonious Monk, John Coltrane, Kaskivano, Angelo Escobar, Silvio Rodríguez, Nano Stern, Ella Fitzgerald, Nina Simone, Skalariak, Queen, Chinoy, The Beatles, Orhan Pamuk, Vicente Huidobro, Oscar Hahn, Oliverio Girondo, Efraín Barquero, Hayao Miyazaki, John Cameron Mitchell, etc. Finalmente no puedo dejar de mencionar a mis fieles compañeros gatunos Cabecita, Bigote y Mutante; y a mis fieles compañeros perrunos: Copi-Copi, Elemento, Adjetivo, Mente En Blanco, Chaucha, Coliforme, Tepo Tepo, Yo No Fui, Fierro Malo, Palmerita, Neumatex, Cortachurro, Etcétera, Maletín, Duque, Guasón, Jefe, Moneda, Cucky, Pelusa, Tía, Legui, Reality, Chester, Chu, Ro, Playita, Palmera, Señor, Re Frito, Pescado, Chamuyo, Calendario, James Bond, Rata, Cabeza de Chaya, Neumático, Repetido, Añico, Rucia, Gonzo, Chino, Cortéz, Albertito.

Resumen

En este documento se revisan las lógicas proposicionales y de primer orden inducidas por la clase de las matrices LPP, y por algunos subconjuntos relevantes de éstas. En particular aparecen los enfoques semánticos y sintácticos para la clase de las matrices LPP, con teoremas de compacidad y completud para lógica proposicional y lógica de primer orden. Se revisan desde este punto de vista algunas lógicas proposicionales sencillas. Se trata fundamentalmente de una revisión de lo expuesto en algunos artículos sobre las lógicas proposicionales (con demostraciones alternativas a las propuestas en varios casos), además la aplicación concreta a éstas lógicas de ciertas herramientas que no se había realizado hasta ahora; por otro lado, es de particular relevancia la axiomatización propuesta para la lógica de primer orden inducida por la clase de las matrices LPP; que difiere ligeramente de la que existía hasta ahora, y los teoremas y metateoremas que se revisan con todo detalle.

Capítulo 1

Introducción

Este trabajo está basado en términos básicos en dos papers que presentan las lógicas proposicionales[LM06] y de primer orden [LM10] para matrices LPP; además se usa en una sección como base dos paper sobre semánticas diádicas[Cal+03a] y su relación con la tesis de Suszko[Cal+03b] para los resultados en torno a las bivaluaciones. Se encuentran en este documento las demostraciones completas de casi la totalidad de los resultados que se utilizan de éstos papers. El documento contiene todas todas las definiciones necesarias para que lo pueda leer alguien no familiarizado con las formalidades del tema, sin embargo se asume cierta familiarizacion con el lenguaje formal de la lógica clásica. La sección siguiente da el marco de defínciones en que nos manejaremos luego; puede leerse de inmediato o saltarse y consultarse solo ante duda.

1.1. Lenguaje y Definiciones básicas

Definición. Entenderemos por *lenguaje proposicional* un conjunto $\mathcal{L}$ de conectivos proposicionales. Las *$\mathcal{L}$-fórmulas* se construyen de la forma usual en base al conjunto numerable de variables proposicionales $Var = p_0, p_1, p_2, \ldots$ usando los conectivos del lenguaje; llamamos al conjunto de las fórmulas $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$.

En nuestro caso, el lenguaje $\mathcal{L}$ tendrá los conectivos $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\neg$; donde los tres primeros son binarios y el último unario; y llamaremos al conjunto de las fórmulas del lenguaje simplemente $\mathcal{F}m$.

Definición. Llamamos los *literales* de $\mathcal{F}m$ al conjunto $\mathcal{L}it$ de todas las fórmulas de la forma $\neg^k p$, donde $\neg^0 p = p$ y $\neg^{k+1} p = \neg(\neg^k p)$, para $p \in Var$. El resto de las fórmulas son llamadas complejas.

Usaremos, cuando sea este tipo de lenguaje el contexto, las letras p, q, r, etc. como variables metalinguísticas para variables proposicionales; P, Q, R, etc. como variables metalinguísticas para fórmulas complejas y letras griegas α, β, γ, etc. para variables metalinguísticas sobre el conjunto de fórmulas $\mathcal{F}m$ en general.

Definición. Entendemos por *$\mathcal{L}$-álgebra* una estructura $\mathbf{A} = \left\langle A, w^{\mathbf{A}} : w \in \mathcal{L} \right\rangle$ donde A es un conjunto no vacío, y para cada conectivo w de rango k en $\mathcal{L}$, $w^{\mathbf{A}}$ es una operación en A de rango k.

Definición. Una *$\mathcal{L}$-matriz* será un par $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathcal{D} \rangle$ donde $\mathbf{A}$ es una *$\mathcal{L}$-álgebra* y $\mathcal{D}$ es un subconjunto propio de A; los elementos de $\mathcal{D}$ son llamados los elementos designados de A.

Definición. Una *valuación algebráica* sobre una matriz $\mathcal{A}$ es una función $v : Var \rightarrow A$.

Esta función se puede extender de manera natural a $\overline{v} : \mathcal{F}m \rightarrow A$; considerando que $\mathcal{F}m$ se construye libremente a partir de las variables proposicionales; lo que nos permite calcular $\overline{v}$ recursivamente. Denotaremos algunas veces α^v o $v(\alpha)$ para referirnos a $\overline{v}(\alpha)$.

Definición. Entenderemos por *lenguaje de primer orden* un conjunto $\mathcal{L}$ de símbolos:

- ◇ Conectivos proposicionales
- ◇ Variables (una para cada entero positivo n): $v_1, v_2, \ldots$
- ◇ Símbolo de igualdad (opcional): $\approx$
- ◇ Parámetros
  - Símbolos de cuantificación: $\forall$, $\exists$.
  - Símbolos de predicado, o de relación: Para cada entero positivo n un conjunto numerable (posiblemente vacío) de símbolos llamados símbolos de predicado n-arios.
  - Símbolos de función: Para cada entero positivo n un conjunto numerable (posiblemente vacío) de símbolos llamados símbolos de función n-arios.
  - Símbolos de constante: un conjunto numerable (posiblemente vacío) de símbolos de constantes.

Definición. El conjunto de los *términos* de $\mathcal{L}$ será el que se construye a partir de constantes y variables, prefijando (cero o más veces) símbolos de función. Tenemos entonces que variables y constantes son términos; y para cada símbolo de función n-ario f, si $t_1, \ldots, t_n$ son términos, $ft_1, \ldots, t_n$ también lo es.

Definición. El conjunto $\mathcal{A}t$ de las *fórmulas atómicas* está formado por las expresiones de la forma $Rt_1, \ldots, t_n$; donde $t_1, \ldots, t_n$ son términos, y R es un símbolo de predicado n-ario. Si nuestro lenguaje tiene símbolo de igualdad y t_1, t_2 son términos $t_1 \approx t_2$ es también fórmula atómica.

Definición. El conjunto $\mathcal{F}m_{\mathcal{L}}$ de las fórmulas de $\mathcal{L}$, al que llamaremos cuando sea claro del contexto simplemente $\mathcal{F}m$ será el de las expresiones que se forman a partir de las fórmulas atómicas usando los conectivos proposicionales o bien anteponiendo $\forall v_i$ o $\exists v_i$ para algún i entero positivo.

En nuestro caso, el lenguaje $\mathcal{L}$ tendrá los conectivos proposicionales $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\neg$; donde, al igual que antes, los tres primeros son binarios y el último unario.

Cuando estemos en el contexto de un lenguaje de primer orden, usaremos las variables metalinguísticas x, y para referirnos a variables del lenguaje, y letras griegas α, β, γ, etc. para variables metalinguísticas sobre el conjunto de fórmulas $\mathcal{F}m$.

Definición. Consideremos una variable cualquiera x, y sea α una fórmula cualquiera del lenguaje. Definimos por recursión que la variable x aparece libre en α si:

- Para α atómica, si y solo x aparece en α. (es decir, si y solo si x es un símbolo de α)
- Para α de la forma $w\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$, con w conectivo proposicional n-ario, si y solo si x aparece libre en α_i para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$
- Para α de la forma $\forall v_i \alpha$ o de la forma $\exists v_i \alpha$ si y solo si x aparece libre en α y $v_i \neq x$.

Diremos que una fórmula σ es una oración si ninguna variable v_i aparece libre en σ.

1.2. Matrices Literal-Paraconsistente-Paracompleta

Sea $\mathcal{L}$ lenguaje proposicional; y sea A un conjunto tal que $\{0,1\} \subseteq A$ y $\mathcal{D} \subseteq A$ tal que $1 \in \mathcal{D}$ y $0 \notin \mathcal{D}$. Sea $\sim : A \rightarrow A$ una función tal que $\sim(0) = 1$ y $\sim(1) = 0$. Definimos la matriz literal-paraconsistente-paracompleta (o LPP-matriz) $\langle \mathbf{A}, \mathcal{D}, \sim \rangle$ con las siguientes operaciones sobre A: [1]

$$a \wedge b = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in \mathcal{D} \text{ y } b \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a \vee b = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in \mathcal{D} \text{ o } b \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a \rightarrow b = \begin{cases} 1, & \text{si } a \notin \mathcal{D} \text{ o } b \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Observamos que una LPP-matriz $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathcal{D}, \sim \rangle$ es una $\mathcal{L}$-matriz, donde las operaciones binarias de $\mathcal{A}$ como $\mathcal{L}$-matriz están definidas como arriba, y la operación unaria $\sim$ es la interpretación en $\mathbf{A}$ de $\neg$. Distinguimos $\sim$ del resto, pues tiene un papel primordial en la definición, ya que las otras operaciones se definen por $\mathcal{D}$; y $\sim$ es independiente de ellas.

No es difícil notar que de hecho nos basta con la negación y la implicación para definir totalmente el sistema. El detalle puede encontrarse en el Anexo.

Es relevante notar que llamamos literal-paraconsistente-paracompleta a estas matrices a pesar de que no todas ellas son paraconsistentes y/o paracompletas. Diremos que una

[1] entenderemos la disyunción “o” de manera inclusiva, es decir, como y/o

LPP-matriz es paraconsistente si para algún $a \in A$ tanto $a \in \mathcal{D}$ como $\sim a \in \mathcal{D}$; y diremos que es paracompleta si para algún $a \in A$ ocurre que $a \notin \mathcal{D}$ y $\sim a \notin \mathcal{D}$. Observamos además de la definición de las operaciones que la paraconsistencia y la paracompletud se pueden dar solo en $\mathcal{L}it$, y que 0 y 1 se comportan clásicamente respecto a la negación.

1.3. Sistemas Deductivos

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje proposicional. Si consideramos una función $\sigma : Var \rightarrow \mathcal{F}m$, ésta puede ser extendida de manera natural a una función, que llamaremos igualmente σ, cuyo dominio es $\mathcal{F}m$, extendiendo de la forma $\sigma\left(\phi\left(p_0, \ldots, p_n\right)\right) = \phi\left(p_0/\sigma(p_0), \ldots, p_n/\sigma(p_n)\right)$, donde p/q significa que substituimos p por q en todas las apariciones de p en la fórmula ϕ; σ será llamada *substitución*. Entenderemos por *regla de inferencia* (finitaria) sobre $\mathcal{L}$ un par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ donde Γ es un subconjunto finito de $\mathcal{F}m$ y φ es una fórmula cualquiera. Una fórmula ψ es directamente derivable de un conjunto Δ de fórmulas por la regla $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ si existe una substitución σ tal que $\sigma(\varphi) = \psi$ y $\sigma\left(\Gamma\right) \subseteq \Delta$; (donde $\sigma\left(\Gamma\right) = \{\sigma(\vartheta) : \vartheta \in \Gamma\}$).

Un *sistema deductivo* $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{L}$ se define por un conjunto (posiblemente infinito) de reglas de inferencia y axiomas (podemos entender si se quiere a los axiomas como reglas de inferencia con Γ vacío); consiste en el par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$; donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es la relación entre un conjunto de fórmulas y una fórmula individual dada por la condición: $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ si y solo si ψ está contenido en el menor conjunto que incluye Δ y todas las substituciones de los axiomas de S, y que además es cerrado bajo derivación directa. Esta relación es llamada relación de consecuencia de $\mathcal{S}$.

Es fácil ver que la relación de consecuencia $\vdash_{\mathcal{S}}$ satisface:

$$\varphi \in \Gamma \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \tag{1.1}$$

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \text{ y } \Gamma \subseteq \Delta \Rightarrow \Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \tag{1.2}$$

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \text{ y } \Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi \text{ para todo } \psi \in \Gamma \Rightarrow \Delta \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \tag{1.3}$$

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \sigma\left(\Gamma\right) \vdash_{\mathcal{S}} \sigma(\varphi) \text{ para cualquier substitución } \sigma \tag{1.4}$$

$$\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \Rightarrow \Gamma' \vdash_{\mathcal{S}} \varphi \text{ para algún } \Gamma' \subseteq \Gamma \text{ finito.} \tag{1.5}$$

En términos generales, si tenemos una relación $R \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{F}m \times \mathcal{F}m)$ que satisface las propiedades (1.1)-(1.4), la llamamos una relación de consecuencia; si además satisface (1.5) la llamamos relación de consecuencia finitaria.

Ha sido probado [ŁS58] que cualquier relación que satisface las propiedades (1.1)-(1.5) es la relación de consecuencia de algún sistema deductivo; por tanto podemos entender como sistema deductivo un par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación que satisface las propiedades (1.1)-(1.5) sin asumir reglas de inferencia o axiomas. Generalizando en esta línea, llamaremos *sistema lógico* a un par $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$, donde $\vdash_{\mathcal{S}}$ es una relación que satisface las propiedades (1.1)-(1.4).

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje de primer orden se define de forma similar el sistema deductivo. Entenderemos por *regla de inferencia* (finitaria) sobre $\mathcal{L}$ un par $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ donde Γ es un subconjunto finito de $\mathcal{F}m$ y φ es una fórmula cualquiera. Si consideramos una función $\sigma : \mathcal{A}t \rightarrow \mathcal{F}m$, ésta puede ser extendida de manera natural a una función, que llamaremos igualmente σ, cuyo dominio es $\mathcal{F}m$, extendiendo de la forma $\sigma(\phi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n)) = \phi(\alpha_0/\sigma(\alpha_0), \ldots, \alpha_n/\sigma(\alpha_n))$, donde α/β significa que substituimos α por β en todas las apariciones de α en la fórmula ϕ; σ será llamada *substitución*. Una fórmula ψ es directamente derivable de un conjunto Δ de fórmulas por la regla $\langle \Gamma, \varphi \rangle$ si existe una substitución σ tal que $\sigma(\varphi) = \psi$ y $\sigma(\Gamma) \subseteq \Delta$.

Un *sistema deductivo* $\mathcal{S}$ sobre $\mathcal{L}$ se define por un conjunto (posiblemente infinito) de reglas de inferencia y axiomas; donde un axioma consiste en un par $\langle \Upsilon, \Gamma \rangle$, donde $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m$ y Υ es algún subconjunto de substituciones. Así, definimos el sistema dedurctivo por $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$; donde, como antes, $\vdash_{\mathcal{S}}$ es la relación entre un conjunto de fórmulas y una fórmula individual dada por la condición: $\Delta \vdash_{\mathcal{S}} \psi$ si y solo si ψ está contenido en el menor conjunto que incluye Δ y todas las generalizaciones universales de las substituciones correspondientes de los axiomas de S, y que además es cerrado bajo derivabilidad directa. Esta relación, al igual que antes, es llamada relación de consecuencia de $\mathcal{S}$.

Esta relación de consecuencia satisface las propiedades (1.1)-(1.3), (1.5); pero en general no satisface la propiedad (1.4), a menos que para todos los axiomas, Υ sea el conjunto de todas las substituciones.

CAPÍTULO **2**

Lógicas Matriciales

Consideremos nuestro lenguaje proposicional $\mathcal{L}$ como antes; y sea $\mathcal{A}$ una *$\mathcal{L}$-matriz* cualquiera. Definimos la relacion $\vDash_{\mathcal{A}}$ entre un conjunto $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m$ y una fórmula $\varphi \in \mathcal{F}m$ como sigue: $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$ si y solo si para cualquier valuación algebráica v se tiene que si $\psi^v \in \mathcal{D}$ para toda $\psi \in \Gamma$, entonces $\varphi^v \in \mathcal{D}$. Para una clase de $\mathcal{L}$-matrices $\mathbb{M}$, definimos la relación $\vDash_{\mathbb{M}}$ entre un conjunto $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m$ y una fórmula $\varphi \in \mathcal{F}m$ por $\Gamma \vDash_{\mathbb{M}} \varphi$ si y solo si se tiene $\Gamma \vDash_{\mathcal{A}} \varphi$ para toda matriz $\mathcal{A}$ en $\mathbb{M}$. Usaremos la notación $\varphi \vDash \phi$ en vez de $\{\varphi\} \vDash \phi$ y $\vDash \phi$ en vez de $\emptyset \vDash \phi$.

Sea $\mathcal{S} = \langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}} \rangle$ un sistema deductivo. Una clase de matrices $\mathbb{M}$ será llamada *semántica matricial para* $\mathcal{S}$ si para todo $\Gamma \cup \{\varphi\} \subseteq \mathcal{F}m$ se tiene $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ si y solo si $\Gamma \vDash_{\mathbb{M}} \varphi$. Por otro lado, dada una clase de matrices $\mathbb{M}$, es facil chequear que $\vDash_{\mathbb{M}}$ cumple las propiedades (1.1)-(1.3) y (1.5). Si demostramos que además satisface (1.4) tendremos un sistema deductivo; si no, de todos modos tenemos una relación de consecuencia y un sistema lógico definido por la clase de matrices dado por $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \varphi$ si y solo si $\Gamma \vDash_{\mathbb{M}} \varphi$.

2.0.1. Congruencia de Leibnitz, Estructura de negación y Matrices Reducidas

Definición. Sea $\mathbf{A} = \langle A, w^{\mathbf{A}} \rangle_{w \in \mathcal{L}}$ una $\mathcal{L}$-álgebra y sea R una relación binaria en A. Diremos que R es una relación de congruencia en $\mathbf{A}$ si satisface que es de equivalencia y para toda fórmula $\varphi(p_0, \ldots, p_n)$ de $\mathcal{L}$ se tiene que si $\langle a_i, b_i \rangle \in R$ para todo $i \leq n$, entonces

$$\left\langle \varphi^{\mathbf{A}}(a_0, \ldots, a_n), \varphi^{\mathbf{A}}(b_0, \ldots, b_n) \right\rangle \in R$$

Si $F \subseteq A$, y θ una congruencia en $\mathbf{A}$; diremos que θ es compatible con F si se tiene que para todo $a, b \in A$, con $a \in \mathcal{D}$ y $\langle a, b \rangle \in \theta$ implican $b \in \mathcal{D}$. En otras palabras, diremos que θ es compatible con F si F es unión de clases de equivalencia de θ.

Definimos en A la relación binaria $\mathbf{\Omega_A} F = \{\langle a, b \rangle : \varphi^{\mathbf{A}}(a, \overline{c}) \in \mathcal{D}$ si y solo si $\varphi^{\mathbf{A}}(b, \overline{c}) \in \mathcal{D}$ para todo $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{F}m$ y todo $\overline{c} \in A^n\}$ donde $\varphi^{\mathbf{A}}$ es la interpretación en $\mathbf{A}$ de la fórmula $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n)$ reemplazando las letras proposicionales $p, q_1, \ldots, q_n$ por $a, c_1, \ldots, c_n$. Es fácil notar que esta relación es una congruencia.

Teorema 2.1. *Dada un álgebra* $\mathbf{A}$ *y* $\mathcal{D}\subseteq A$*,* $\mathbf{\Omega_A}F$ *es la congruencia más grande en* $\mathbf{A}$ *compatible con* $\mathcal{D}$*.*

Demostración. Es fácil notar que esta congruencia es compatible con $\mathcal{D}$, tomando $\varphi(p) = p$. Por otro lado, si tenemos θ una congruencia cualquiera que sea compatible con F, consideramos un par cualquiera $\langle a, b\rangle \in \theta$ y una fórmula $\varphi = \varphi(p, q_0, \ldots, q_n)$. Como θ es relacion de congruencia, tenemos que para todo $c_1, \ldots, c_n \in A$,

$$\left\langle \varphi^{\mathbf{A}}(a, c_1, \ldots, c_n), \varphi^{\mathbf{A}}(b, c_1, \ldots, c_n)\right\rangle \in \theta$$

y luego por la compatibilidad de θ con $\mathcal{D}$ tenemos:

$$\varphi^{\mathbf{A}}(a, c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{D} \Leftrightarrow \varphi^{\mathbf{A}}(b, c_1, \ldots, c_n) \in \mathcal{D}$$

Por lo anterior se tiene entonces $\langle a, b\rangle \in \mathbf{\Omega_A}F$; de lo cual se desprende que $\theta\subseteq\mathbf{\Omega_A}F$. □

Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbf{A}, \mathcal{D}, \sim\rangle$ una matriz LPP. Entenderemos por la *estructura de negación* de $\mathcal{M}$ a la función $nstr_{\mathcal{M}} : A\to\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ tal que $nstr_{\mathcal{M}}(a)_k = 1$ si y solo si $\sim^k a \in \mathcal{D}$. Para un a fijo, llamamos el *tipo de negación de a* a la tupla $nstr_{\mathcal{M}}(a)$.

Lema 2.2. *Sea* v *una valuación algebráica. Para todo* $a, b \in A$ *se define:*

$$v_p(a|b)(p) = \begin{cases} p^v, & \text{si } p^v \neq a \\ b, & \text{si } p^v = a \end{cases}$$

y $v_p(a|b)(q) = v(q)$*, si* $q \neq p$*. Entonces si* $nstr_{\mathcal{M}}(a) = nstr_{\mathcal{M}}(b)$*, y* α *es una fórmula,* $\alpha^v \in \mathcal{D}$ *si y solo si* $\alpha^{v(a|b)} \in \mathcal{D}$*, donde* $v(a|b)$ *se entiende aquí como la extensión natural de la valuación* $v_p(a|b)$ *antes definida, al conjunto* $\mathcal{F}m$*.*

Demostración. Procedemos por inducción en el largo de la fórmula, partiendo con $\mathcal{L}it$:

- ◇ Si α es de la forma $\neg^k q$, con $q \neq p$ $\alpha^{v_p(a|b)} = \sim^k q^v$ y $\alpha^v = \sim^k q^v$.
- ◇ Si α es de la forma $\neg^k p$ es directo de la definición de $v_p(a|b)(p)$, basta con ver los dos casos:
  - Si $p^v = a$, entonces $\alpha^{v_p(a|b)} = \sim^k b$ y $\alpha^v = \sim^k a$. Luego es claro aqui que $\alpha^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\alpha^{v(a|b)} \in \mathcal{D}$, dado que $nstr_{\mathcal{M}}(a) = nstr_{\mathcal{M}}(b)$
  - Si $p^v \neq a$, entonces $\alpha^v = \alpha^{v_p(a|b)} = \sim^k p^v$.
- ◇ Si α es de la forma $\beta\wedge\gamma$, y asumimos que

$$\beta^v \in \mathcal{D} \text{ si y solo si } \beta^{v(a|b)} \in \mathcal{D} \tag{2.1}$$

$$\gamma^v \in \mathcal{D} \text{ si y solo si } \gamma^{v(a|b)} \in \mathcal{D} \tag{2.2}$$

Tenemos por la definicion del operador que: $\alpha^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\beta^v \in \mathcal{D}$ o $\gamma^v \in \mathcal{D}$; y equivalentemente para $v(a|b)$ se tiene

$$\alpha^v \in \mathcal{D} \text{ si y solo si } \beta^v \in \mathcal{D} \text{ o } \gamma^v \in \mathcal{D} \tag{2.3}$$

$$\alpha^{v(a|b)} \in \mathcal{D} \text{ si y solo si } \beta^{v(a|b)} \in \mathcal{D} \text{ o } \gamma^{v(a|b)} \in \mathcal{D} \tag{2.4}$$

Luego usando (2.1) y (2.2) en (2.3) y (2.4) se tiene $\alpha^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\alpha^{v(a|b)} \in \mathcal{D}$.

◇ Si α es de la forma $\beta\vee\gamma$ o $\beta\to\gamma$, se procede se forma simlar al caso en que α es de la forma $\beta\wedge\gamma$. □

Teorema 2.3. *$\langle a, b\rangle \in \mathbf{\Omega_A} F$ si y solo si $nstr_{\mathcal{M}}(a) = nstr_{\mathcal{M}}(b)$*

Demostración. De la definición de $\mathbf{\Omega_A} F$ se tiene que $\langle a, b\rangle \in \mathbf{\Omega_A} F$ si y solo si para toda fórmula $\varphi(p, q_1, \ldots, q_n) \in \mathcal{F}m$ y todo $\bar{c} \in A^n$ se tiene $\varphi^{\mathbf{A}}(a, \bar{c}) \in \mathcal{D}$ si y solo si $\varphi^{\mathbf{A}}(b, \bar{c}) \in \mathcal{D}$.

Tenemos que si $\langle a, b\rangle \in \mathbf{\Omega_A} F$, entonces vale en particular para el caso $\varphi(p) = \neg^k p$, por lo cual se tiene que si $\langle a, b\rangle \in \mathbf{\Omega_A} F$ entonces $nstr_{\mathcal{M}}(a) = nstr_{\mathcal{M}}(b)$.

Por otro lado, es fácil notar que $\langle a, b\rangle \in \mathbf{\Omega_A} F$ es equivalente a que para toda valuación algebráica v tal que $v(p) = a$, y para toda $\varphi \in \mathcal{F}m$ se tenga

$$\varphi^v \in \mathcal{D} \text{ si y solo si } \varphi^{v_p(a|b)} \in \mathcal{D} \tag{2.5}$$

De este modo, si $nstr_{\mathcal{M}}(a) = nstr_{\mathcal{M}}(b)$, entonces por el Lema 2.2 se cumple $\langle a, b\rangle \in \mathbf{\Omega_A} F$. □

Diremos que una matriz $\mathcal{M}$ es reducida, si para cada tipo de negación presente en $\mathcal{M}$ existe un solo elemento; es decir, si $\mathcal{M}$ es una matriz cualquiera, $\mathcal{M}|_{\mathbf{\Omega_A} F} = \langle A|_{\mathbf{\Omega_A} F}, \mathcal{D}|_{\mathbf{\Omega_A} F}, \sim \rangle$ es reducida. Es un hecho conocido que una matriz, o clase de matrices; generan la misma lógica matricial que sus matrices reducidas.

Sean a, b dos elementos cualquiera de $\mathcal{M}$, diremos que son separables si existe una fórmula de una sola variable $\varphi(p)$ tal que $\varphi(a)\vee\varphi(b) = 1$ y $\varphi(a)\wedge\varphi(b) = 0$. Es decir si existe una fórmula $\varphi(p)$ tal que una y solo una de las fórmulas $\varphi(a)$, $\varphi(b)$ está en el filtro. Podemos reformular entonces la definición anterior; diremos que una matriz $\mathcal{M}$ es reducida, si para todo par de elementos a, b en $\mathcal{M}$ distintos entre si se tiene que a, b son separables.

Podemos ir incluso más allá y decir que dos elementos a, b en $\mathcal{M}$ son fuertemente separables si existe una fórmula de una sola variable $\varphi(p)$ tal que $\{\varphi(a), \varphi(b)\} = \{0, 1\}$. Esta noción aparentemente más fuerte que la separabilidad es de hecho equivalente; basta para ello observar lo siguiente:

Observación. Para todo $a \in A$ se tiene

$$(a\to a)\to a = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{si } a \notin \mathcal{D} \end{cases} \tag{2.6}$$

esto ocurre porque de la definición de $\to$, para cualquier $a \in A$ se tiene $a\to a = 1$; por otro lado, como $1 \in \mathcal{D}$,

$$1\to a = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{si } a \notin \mathcal{D} \end{cases} \tag{2.7}$$

Para cada par de elementos en a, b, si $nstr_{\mathcal{M}}(a) = nstr_{\mathcal{M}}(b)$, entonces existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\{nstr_{\mathcal{M}}(a)_k, nstr_{\mathcal{M}}(b)_k\} = \{0, 1\}$. Usando la observación tenemos entonces que si se define

$$\varphi(p) = (\neg^k p\to\neg^k p)\to\neg^k p$$

entonces

$$\{\varphi(a), \varphi(b)\} = \{0, 1\}$$

Lema 2.4. *Compacidad para Matrices finitas: Sea $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{D}\rangle$ una $\mathcal{L}$-matriz finita, es decir, con M finito, entonces si $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}} \varphi$ existe $\Gamma' \subseteq \Gamma$ finito tal que $\Gamma' \vDash_{\mathcal{M}} \varphi$.*

Demostración. El caso en que Γ es finito es trivial tomando $\Gamma' = \Gamma$. Nos enfocamos entonces en el caso infinito, asumimos entonces que Γ es infinito numerable (esto se da por la cardinalidad del lenguaje). Usaremos para esta demostración el Lema de König para árboles (ver por ejemplo: [KR96, Theorem 1.11.3]); teniendo esta idea en perspectiva consideramos:

$$\begin{aligned} \Gamma &= \{\psi_i : i \in \omega\} \\ \Gamma_i &= \{\psi_j : j \leq i\} \\ V_i &= \{\text{las variables que aparecen en } \Gamma_i \cup \{\varphi\}\} \\ S_i &: V_i\to M \text{ una valuación cualquiera del subconjunto de las variables } V_i \text{ en } M \end{aligned}$$

Consideraremos el problema por contrarecíproco, supondremos que para cada $\Gamma_i \subseteq \Gamma$ existe una valuación algebráica S_i de las variables V_i en M tal que se cumple[1]:

$$\overline{S_i}(\psi_i) \in \mathcal{D} \qquad \forall j \leq i \tag{2.8}$$

$$\overline{S_i}(\varphi) \notin \mathcal{D} \tag{2.9}$$

Observamos de inmediato que si S_{r+1} satisface (2.8) y (2.9), entonces $S_{r+1}|_{V_r}$, la restricción de S_{r+1} a V_r satisface (2.8) y (2.9) con $i = r$.

Dada esta observación consideramos de forma natural un árbol donde en el nivel i-ésimo están todas las valuaciones S_i que satisfacen (2.8) y (2.9), y donde un S_{i+1} está unido por una arista a un S_i ssi $S_{i+1}|_{V_i} = S_i$.

Vemos que el árbol satisface las hipótesis del *Lema de König*

i Para cada $i \in \omega$ hay al menos una valuación S_i de las variables V_i en M que satisface (2.8) y (2.9) por hipótesis, y por tanto el árbol tiene infinitos vértices.

[1]Notamos que al trabajar con Γ_i no perdemos generalidad, pues si vale para cualquier subconjunto finito, vale para los Γ_i; y si vale para todos los Γ_i, dado un conjunto finito T, consideramos la restricción de S_i a T.

ii Cada S_i se ramifica en a lo más $m^{(|V_{i+1}|-|V_i|)}$, donde m es la cardinalidad del álgebra M, pues de la definición de las aristas, todas las valuaciones que se ramifican de un S_i deben coincidir en las variables V_i. De esto se desprende que el árbol es de ramificaciones finitas en cada vértice.

Luego, aplicando el Lema de König, el árbol tiene al menos una rama infinita.

Sea $S = \bigcup S_i$, para los S_i en esa rama. Claramente S es una interpretación de todas las variables de $\Gamma \cup \{\varphi\}$ en M; además S satisface:

$$\begin{aligned} \overline{S}(\psi_i) &\in \mathcal{D} \qquad \forall i \in \omega \\ \overline{S}(\varphi) &\notin \mathcal{D} \end{aligned}$$

Finalmente, por la existencia de tal S, $\Gamma \not\models_{\mathcal{M}} \varphi$. □

Entonces sabemos que si $\mathcal{M}$ es una matriz finita, se tiene que $\models_{\mathcal{M}}$ satisface la propiedad (1.5) y por tanto define una relación de consecuencia finitaria, y del mismo modo, un sistema deductivo S para el cual podemos recuperar axiomas y reglas de inferencia. Lo mismo ocurrirá con $\models_{\mathbb{M}}$, cuando $\mathbb{M}$ es una clase compuesta por una cantidad finita de matrices finitas.

2.1. Lógica Proposicional para la clase de LPP-Matrices

Esta lógica consiste en la lógica matricial inducida por la clase de todas las matrices LPP.

2.1.1. Axiomatización

Definiremos ahora un sistema deductivo que resulta ser equivalente con la lógica matricial definida por la clase de las matrices LPP, en el sentido de que sus relaciones de consecuencia coinciden.

2.1.1.1. Axiomas

Definimos el sistema deductivo SLPPL [2] con los siguientes axiomas:

(A1) $p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_0)$

(A2) $(p_0 \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2)) \rightarrow ((p_0 \rightarrow p_1) \rightarrow (p_0 \rightarrow p_2))$

(A3) $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_0$

(A4) $(p_0 \wedge p_1) \rightarrow p_1$

[2] Por la Sigla en inglés Sentential Literal Paraconsistent Paracomplete Logic

(A5) $(p_0 \to p_1) \to ((p_0 \to p_2) \to (p_0 \to (p_1 \wedge p_2)))$

(A6) $p_0 \to (p_0 \vee p_1)$

(A7) $p_1 \to (p_0 \vee p_1)$

(A8) $(p_0 \to p_1) \to ((p_2 \to p_1) \to ((p_0 \vee p_2) \to p_1))$

(A9) $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$, para todos los tipos de fórmulas complejas P y Q

y Modus Ponens (MP) $\langle p \to q, p; q \rangle$ como única regla de inferencia.

Teorema 2.5. *Teorema de Deducción: En SLPPL se satisface: si* $\Gamma, \alpha \vdash \beta$*, entonces* $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

Demostración. Procedemos por inducción en el largo de la demostración de β a partir de Γ, α.

◇ Caso 1: $\alpha = \beta$ Tenemos entonces

- $\vdash \alpha \to (\alpha \to \alpha)$, por (A1) con $v(p_0) = \alpha$, $v(p_1) = \alpha$.
- $\vdash \alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)$, por (A1) con $\sigma(p_0) = \alpha$, $\sigma(p_1) = (\alpha \to \alpha)$.
- $\vdash (\alpha \to ((\alpha \to \alpha) \to \alpha)) \to (\alpha \to (\alpha \to \alpha) \to (\alpha \to \alpha))$, por (A2), con $\sigma(p_0) = \alpha$, $\sigma(p_1) = (\alpha \to \alpha)$, $\sigma(p_2) = \alpha$.

Usando lo anterior y MP dos veces obtenemos $\vdash \alpha \to \alpha$

◇ Caso 2: β es una substitución de un axioma, o es un miembro de Γ. En tal caso se tiene
$\vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$ por (A1), y $\Gamma \vdash \beta$. Luego $\Gamma \vdash \alpha \to \beta$

◇ Caso 3: β se obtiene por MP de $\{\varphi, \varphi \to \beta\}$. En este caso tenemos $\Gamma, \alpha \vdash \varphi$ y $\Gamma, \alpha \vdash \varphi \to \beta$; por hipótesis de inducción tenemos entonces:

$\Gamma \vdash (\alpha \to \varphi)$ y $\Gamma \vdash (\alpha \to (\varphi \to \beta))$.

Se tiene $\vdash (\alpha \to (\varphi \to \beta)) \to ((\alpha \to \varphi) \to (\alpha \to \beta))$, por (A2). Luego usando nuestra hipótesis y MP dos veces obtenemos $\Gamma \vdash \varphi$. □

Agrupamos ahora algunas consecuencias útiles del teorema de deducción y de la axiomatización utilizada:

Corolario 2.6. *Para cualquier* $\alpha \in \mathcal{F}m$ *se cumple* $\vdash \alpha \to \alpha$

Corolario 2.7. *Para cualquier* $\alpha, \beta \in \mathcal{F}m$ *se cumple* $\alpha \vdash \beta \to \alpha$

Demostración. Sustituímos en (A1) p_0 por α y p_1 por β; tenemos $\vdash \alpha \to (\beta \to \alpha)$; luego por MP se tiene lo buscado. □

Corolario 2.8. *Para cualquier* $\alpha \in \mathcal{F}m$ *se cumple* $\alpha \vee \alpha \vdash \alpha$

Demostración. Sustituimos en (A8) todas las letras proposicionales por α y obtenemos

$$\vdash (\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \vee \alpha) \to \alpha)) \tag{2.10}$$

Usando el Corolario 2.6, y MP dos veces en 2.10 tenemos lo que buscábamos, es decir,

$$\vdash (\alpha \vee \alpha) \to \alpha$$

□

Corolario 2.9. *Si se tiene* $\Sigma \vdash \alpha$ *y* $\Sigma \vdash \beta$*, entonces* $\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta$*, para todo* $\alpha, \beta \in \mathcal{F}m$

Demostración. Si consideramos en (A5) una substitución tal que $\sigma(p_0) = \alpha = \sigma(p_1)$ y $\sigma(p_2) = \beta$, tenemos

$$\vdash (\alpha \to \alpha) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \alpha \wedge \beta))$$

Usando MP y los corolarios 2.6 y 2.7 se tiene $\Sigma \vdash \alpha \wedge \beta$. □

Teorema 2.10. *Sea* $\varphi(p_0, \cdots, p_n)$ *una tautología clásica. Entonces* $\vdash_{SLPPL} \varphi(A_0, \cdots, A_n)$*, para fórmulas complejas* $A_0, \ldots, A_n$*.*

Demostración. Basta con observar que los axiomas (A1)-(A9) junto a MP forman una de las axiomatizaciones conocidas del cálculo proposicional clásico; asi podemos reemplazar $A_0, \ldots, A_n$ en la demostración de $\varphi(p_0, \cdots, p_n)$ en C.P.C y obtener una demostración en SLPPL. □

Lema 2.11. *Lema de Contraposición:*

- ◇ *Si* A *y* B *son fórmulas complejas, son equivalentes:*

$$\Sigma, A \vdash_{SLPPL} B$$
$$\Sigma, \neg B \vdash_{SLPPL} \neg A$$

Demostración. Para la primera mitad de la equivalencia usamos Teorema de Deducción; si $\Sigma, A \vdash B$, entonces $\Sigma \vdash A \to B$; por otro lado, sabemos que $(A \to B) \to (\neg B \to \neg A)$ es una tautología clásica, luego del Teorema 2.10 y lo anterior obtenemos usando MP $\Sigma \vdash \neg B \to \neg A$; usando nuevamente MP tenemos que $\Sigma, \neg B \vdash \neg A$.

Para la segunda mitad de la equivalencia observamos primero que por el Teorema de Deducción, si $\Sigma, \neg B \vdash \neg A$ entonces $\Sigma \vdash \neg B \to \neg A$; luego usando el axioma A9 y MP obtenemos $\Sigma \vdash A \to B$, y finalmente, por MP se tiene $\Sigma, A \vdash B$ □

- ◇ *Si* A *y* B *son fórmulas complejas, son equivalentes:*

$$\Sigma, \neg A \vdash_{SLPPL} B$$
$$\Sigma, \neg B \vdash_{SLPPL} A$$

Demostración. Usamos el teorema anterior, solo debemos notar que $\neg\neg A \leftrightarrow A$ es una tautología clásica. □

2.1.2. Completud

Nuestro objetivo es demostrar que $\Gamma \vdash_{\text{SLPPL}} \varphi$ es equivalente a $\Gamma \models_{\text{LPP}} \varphi$; es decir que el sistema deductivo antes definido axiomáticamente es equivalente al definido por la clase de todas las matrices LPP. En primer lugar necesitamos algunas definiciones.

Definición.

- $\diamond$ Un conjunto Σ de fórmulas se dice *no trivial* si existe alguna fórmula que no es deducible a partir de Σ. En otro caso, diremos que es *trivial*.
- $\diamond$ Sea $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathcal{D}, \sim \rangle$ una matriz-LPP; un conjunto Σ de fórmulas se dice $\mathcal{A}$-*satisfactible* si existe una valuación v sobre $\mathcal{A}$ tal que $\sigma^v \in \mathcal{D}$ para todo $\sigma \in \Sigma$. Diremos simplemente que Σ es *satisfactible* si existen una matriz $\mathcal{A}$ y una valuación v en $\mathcal{A}$ tal que Σ es $\mathcal{A}$-*satisfactible*.
- $\diamond$ Un conjunto no trivial de fórmulas Σ se dice *maximal* si para cualquier $\vartheta \notin \Sigma$, $\Sigma \cup \{\vartheta\}$ es trivial.
- $\diamond$ Un conjunto de fórmulas Σ se dice *filtro deductivo* si contiene todas las substituciones de los axiomas y es cerrado bajo MP.

Lema 2.12. *Un conjunto de fórmulas Σ es trivial si y solo si existe una fórmula compleja P tal que $\Sigma \vdash \neg(P\to P)$ (equivalentemente, por ser fórmula compleja $\Sigma \vdash P\wedge\neg P$)*

Demostración. De izquierda a derecha es inmediato de la definición; de derecha a izquierda observamos que si α es una fórmula cualquiera del lenguaje y $\Sigma \vdash \neg(P\to P)$, entonces

$$\Sigma, \neg(\alpha\vee\alpha) \vdash \neg(P\to P)$$

Usando el teorema de deducción (Teo. 2.5) se tiene $\Sigma \vdash \neg(\alpha\vee\alpha)\to\neg(P\to P)$, y usando ahora el axioma A9, y el corolario 2.6 tenemos $\Sigma \vdash \alpha\vee\alpha$, lo que por el Corolario 2.9 implica $\Sigma \vdash \alpha$; dando la trivialidad de Σ $\square$

Lema 2.13. *Si Σ es un conjunto maximal de fórmulas, entonces es un filtro deductivo.*

Demostración. Sea θ una fórmula tal que o bien es la instancia de un axioma o se obtiene por MP de $\{\tau, \tau\to\theta\}\subseteq\Sigma$; en ambos casos tenemos $\Sigma \vdash_{SLPPL} \theta$. Nuestro objetivo es demostrar que $\theta \in \Sigma$; supongamos que no es así; por maximalidad de Σ, $\Sigma \cup \{\theta\}$ es trivial, es decir, para cualquier fórmula α se tiene $\Sigma \cup \{\theta\} \vdash \alpha$; lo que por el teorema 2.5 implica que se tiene $\Sigma \vdash \theta\to\alpha$, lo que por MP se traduce en $\Sigma \vdash \alpha$, contradiciendo la no trivialidad de Σ (implícita al hablar de maximal). Por tanto $\theta \in \Sigma$, y entonces Σ cumple las condiciones de la definición de filtro deductivo. $\square$

Teorema 2.14. *Si Σ es un conjunto no trivial de fórmulas, entonces es satisfactible.*

Demostración. La idea de demostración es seguir el método que se usa para el cálculo proposicional clásico para construir un conjunto maximal de fórmulas adecuado; para posteriormente encontrar una matriz-LPP razonable. Comenzamos con una numeración de las fórmulas del lenguaje $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$. Extendemos Σ a un filtro deductivo de la siguiente forma:

$$\Sigma_0 = \Sigma, \Sigma_{n+1} = \begin{cases} \Sigma_n \cup \{\varphi_n\} & \text{si es no trivial} \\ \Sigma_n & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Por definición cada Σ_n es no trivial, definimos entonces

$$\overline{\Sigma} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Sigma_n$$

$\overline{\Sigma}$ es no trivial, pues si lo fuera, se tendría $\overline{\Sigma} \vdash \neg(A{\rightarrow}A)$ para alguna fórmula compleja A, pero como las demostraciones son finitas, se tendría $\overline{\Sigma_n} \vdash \neg(A{\rightarrow}A)$ para algún $n \in \mathbb{N}$, contradiciendo la no trivialidad de Σ_n.

Por otro lado $\overline{\Sigma}$ es maximal por construcción. Por el Lema 2.13 se tiene entonces que $\overline{\Sigma}$ es cerrado bajo deducciones y contiene todos los axiomas, es decir, es un filtro deductivo. Por otro lado, es fácil observar que para toda fórmula compleja A se tiene: $A \in \overline{\Sigma}$ si y solo si $\neg A \notin \overline{\Sigma}$. De izquierda a derecha se resuelve de inmediato por contradicción, usando el Lema 2.12. De derecha a izquierda supongamos $A \notin \overline{\Sigma}$; en este caso se tiene $\Sigma \cup \{A\}$ trivial, entonces en particular se tiene, usando el teorema de deducción que $\overline{\Sigma} \vdash A{\rightarrow}\neg A$. Por otro lado, como A es compleja de tiene $\vdash (A{\rightarrow}\neg A){\rightarrow}\neg A$, por ser una tautología clásica. Por MP concluimos $\overline{\Sigma} \vdash \neg A$, y como $\overline{\Sigma}$ es filtro deductivo, $\neg A \in \overline{\Sigma}$.

Definimos entonces ahora la matriz adecuada de la forma natural, es decir:

$$\mathcal{M} = \langle \{0,1\} \cup \mathcal{L}it, \mathcal{D}, \sim \rangle$$

Donde $\mathcal{D} = \{\neg^k p \in \mathcal{L}it : \neg^k p \in \overline{\Sigma}\} \cup \{1\}$ y $\sim$: $\mathcal{L}it{\rightarrow}\mathcal{L}it$ se define evidentemente por $\sim \alpha = \neg\alpha$; las demás operaciones de la matriz se definen de modo que se trate de una matriz LPP.

Consideramos la valuación algebráica v tal que $v(p) = p$ para todo $p \in \mathcal{L}it$; veremos por inducción en el largo de la fórmula que $\alpha^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\alpha \in \overline{\Sigma}$.

- ◇ Si $\alpha \in \mathcal{L}it$; se sigue de la definición de F.
- ◇ Si $\alpha = \neg\beta$, con $\beta \notin \mathcal{L}it$. En este caso, tanto α como β son complejas; por este motivo se tiene por un lado $\alpha^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\alpha^v = 1$ y producto de la definición de la negación y usando la complejidad de β; $\alpha^v = 1$ si y solo si $\beta^v = 0$; que por hipótesis de inducción implica $\beta \notin \overline{\Sigma}$; y por tanto como $\alpha = \neg\beta$, por una observación anterior tenemos $\alpha \in \overline{\Sigma}$.
- ◇ Si $\alpha = \beta{\rightarrow}\gamma$, con $\beta^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\beta \in \overline{\Sigma}$ y $\gamma^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\gamma \in \overline{\Sigma}$. Como α es compleja; tenemos que son equivalentes:

$$\begin{aligned} \alpha^v &\in \mathcal{D} \\ (\beta{\rightarrow}\gamma)^v &= 1 \\ \beta^v \notin \mathcal{D} \text{ o } \gamma^v &\in \mathcal{D} \\ \beta \notin \overline{\Sigma} \text{ o } \gamma &\in \overline{\Sigma} \end{aligned}$$

Falta probar entonces que $\beta \notin \overline{\Sigma}$ o $\gamma \in \overline{\Sigma}$ es equivalente a $(\beta{\rightarrow}\gamma) \in \overline{\Sigma}$. Revisamos primero la implicancia de izquierda a derecha; tenemos dos casos:

- $\beta \notin \overline{\Sigma}$: Por construcción sabemos $\overline{\Sigma} \cup \{\beta\}$ es trivial; luego $\overline{\Sigma} \cup \{\beta\} \vdash \gamma$ y por teo. 2.5 se tiene $\overline{\Sigma} \vdash \beta{\rightarrow}\gamma$; luego considerando la maximalidad de $\overline{\Sigma}$ se tiene $\beta{\rightarrow}\gamma \in \overline{\Sigma}$
- $\gamma \in \overline{\Sigma}$ por Corolario 2.7 tenemos de inmediato $\overline{\Sigma} \vdash \beta{\rightarrow}\gamma$, y como vimos antes, esto implica $\beta{\rightarrow}\gamma \in \overline{\Sigma}$, es decir, $\alpha \in \overline{\Sigma}$.

Para probar la otra implicancia basta con contar que si $\beta{\rightarrow}\gamma \in \overline{\Sigma}$ se satisface o bien $\beta \notin \overline{\Sigma}$ o $\beta \in \overline{\Sigma}$; en el segundo caso tenemos por MP. $\overline{\Sigma} \vdash \gamma$, lo que por ser $\overline{\Sigma}$ maximal implica $\gamma \in \overline{\Sigma}$.

◇ Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$, con $\beta^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\beta \in \overline{\Sigma}$ y $\gamma^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\gamma \in \overline{\Sigma}$. Se tiene que son equivalentes:

$\alpha^v \in \mathcal{D}$

$(\beta \wedge \gamma)^v = 1$

$\beta^v \in \mathcal{D}$ y $\gamma^v \in \mathcal{D}$

$\beta \in \overline{\Sigma}$ y $\gamma \in \overline{\Sigma}$

$\overline{\Sigma} \vdash \beta \wedge \gamma$ por Cor.2.9 y Axiomas A3 y A4

◇ Si $\alpha = \beta \vee \gamma$, con $\beta^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\beta \in \overline{\Sigma}$ y $\gamma^v \in \mathcal{D}$ si y solo si $\gamma \in \overline{\Sigma}$. Se tiene que son equivalentes:

$\alpha^v \in \mathcal{D}$

$(\beta \vee \gamma)^v = 1$

$\beta^v \in \mathcal{D}$ o $\gamma^v \in \mathcal{D}$

$\beta \in \overline{\Sigma}$ o $\gamma \in \overline{\Sigma}$

Falta probar que $\beta \in \overline{\Sigma}$ o $\gamma \in \overline{\Sigma}$ es equivalente a $\overline{\Sigma} \vdash \beta \vee \gamma$. Para la implicancia de izquierda a derecha tenemos que si $\beta \in \overline{\Sigma}$, por el axioma A6 se tiene $\overline{\Sigma} \vdash \beta \vee \gamma$; similarmente usando el axioma A7 se tiene que si $\gamma \in \overline{\Sigma}$, entonces $\overline{\Sigma} \vdash \beta \vee \gamma$. En ambos casos, como observamos anteriormente por la maximalidad de $\overline{\Sigma}$, se tiene $\beta \vee \gamma \in \overline{\Sigma}$.

Para la implicancia en el otro sentido supongamos por contradicción que $\beta \notin \overline{\Sigma}$ y $\gamma \notin \overline{\Sigma}$; es decir $\overline{\Sigma} \cup \{\beta\}$ y $\overline{\Sigma} \cup \{\gamma\}$ son triviales; luego si P es una fórmula compleja cualquiera tenemos $\overline{\Sigma} \cup \{\beta\} \vdash P \wedge \neg P$ y $\overline{\Sigma} \cup \{\gamma\} \vdash P \wedge \neg P$; lo que por teorema de deducción es equivalente a $\overline{\Sigma} \vdash \beta{\rightarrow}(P \wedge \neg P)$ y $\overline{\Sigma} \vdash \gamma{\rightarrow}(P \wedge \neg P)$; luego usando el axioma A8 y MP tenemos $\overline{\Sigma} \vdash (P \wedge \neg P)$; lo que contradice la no trivialidad de $\overline{\Sigma}$. Luego si $\overline{\Sigma} \vdash \beta \vee \gamma$, entonces $\beta \in \overline{\Sigma}$ o $\gamma \in \overline{\Sigma}$. □

Corolario 2.15. *Teorema de Completud: Si* $\Sigma \vDash_{SLPPL} \varphi$*, entonces* $\Sigma \vdash_{LPP} \varphi$

Demostración. Demostraremos de manera directa; tenemos que si $\Sigma \vDash \varphi$, entonces para cualquier matriz-LPP $\mathcal{A} = \langle \mathbf{A}, \mathcal{D}, \sim \rangle$ y valuación algebráica v sobre $\mathcal{A}$ tal que $v(\Sigma) \subseteq \mathcal{D}$, se tiene también $v(\varphi) \in \mathcal{D}$, o equivalentemente $v(\varphi \vee \varphi) = 1$; de este modo tenemos que si $\Sigma \vDash \varphi$, entonces $\Sigma \vDash \varphi \vee \varphi$. Esto último es equivalente a que para cualquier valuación tal que $v(\Sigma) \subseteq \mathcal{D}$, se tiene $v(\neg(\varphi \vee \varphi)) = 0$; es decir, $\Sigma \cup \{\neg(\varphi \vee \varphi)\}$ no es satisfactible, lo que por el teorema 2.14 implica que es trivial; en particular se tiene $\Sigma \cup \{\neg(\varphi \vee \varphi)\} \vdash \neg(p_0 \to p_0)$, y por teorema de deducción (Teo. 2.5)

$$\Sigma \vdash \neg(\varphi \vee \varphi) \to \neg(p_0 \to p_0) \tag{2.11}$$

Por otro lado, es una tautología clásica $(\neg p \to \neg q) \to q \to p$; usando entonces la substitución adecuada, y MP obtenemos de (2.11) $\Sigma \vdash (p_0 \to p_0) \to (\varphi \vee \varphi)$, y ahora usando Cor. 2.6 y MP se tiene $\Sigma \vdash \varphi \vee \varphi$. Finalmentente, por el Corolario 2.8 se tiene $\Sigma \vdash \varphi$; lo que buscábamos. □

2.1.3. Corrección

La primera preocupación que se debe tener respecto a la axiomatización de un sistema lógico conocido es si ésta es correcta, es decir, si nuestro conjunto de reglas de inferencia y de axiomas son tales que la relación de deducción que definen está contenida en la relación de deducción del sistema lógico; en otras palabras, si las inferencias que hacemos son también consecuencias lógicas del sistema original.

Teorema 2.16. *Corrección: Si* $\Sigma \vdash_{LPPL} \varphi$*, entonces* $\Sigma \vDash_{SLPPL} \varphi$

Demostración. Para chequear la corrección del sistema propuesto –es decir, que si $\Sigma \vdash_{LPPL} \varphi$, entonces $\Sigma \vDash_{SLPPL} \varphi$– nos bastará con chequear que se tiene $\vDash_{SLPPL} A_i$ para todos los axiomas, y que $\{p \to q, p\} \vDash_{LPPL} q$.

Comenzamos con la única regla de inferencia del sistema: Sean p, q fórmulas cualesquiera en $\mathcal{F}m$. Si consideramos una valuación algebráica v cualquiera tal que $v(p) \in \mathcal{D}$ y $v(p \to q) \in \mathcal{D}$ (equivalentemente, $v(p) \to v(q) = 1$), entonces sabemos de la definición de $v(p) \to v(q)$ que $v(q) \in \mathcal{D}$.

Chequeamos ahora todos los axiomas en el orden en que han sido presentados antes. Observamos que cualquiera de los axiomas es una fórmula compleja, por tanto para todo axioma A, $v(A) \in \mathcal{D}$ si y solo si $v(A) = 1$; para la demostración de la corrección de los axiomas A1-A8 listaremos una serie de equivalencias para $v(A) = 1$ o $v(A) = 0$.

(A1) $p_0 \to (p_1 \to p_0)$.

- ◇ $v(p_0 \to (p_1 \to p_0)) = 1$
- ◇ $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1 \to p_0) \in \mathcal{D}$
- ◇ $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \to v(p_0) \in \mathcal{D}$ (este paso será omitido en lo sucesivo)

- $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_0) \in \mathcal{D}$

luego se tiene $\models_{SLPPL}$A1

(A2) $(p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \to p_1) \to (p_0 \to p_2))$

- $v((p_0 \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_0 \to p_1) \to (p_0 \to p_2))) = 1$
- $v(p_0 \to (p_1 \to p_2)) = 0$ o $v((p_0 \to p_1) \to (p_0 \to p_2)) = 1$
- ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1 \to p_2) = 1$) o ($v(p_0 \to p_1) = 0$ o $v(p_0 \to p_2) = 1$)
- ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_2) \in \mathcal{D}$) o ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$ o $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_2) \in \mathcal{D}$)
- $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_2) \in \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$

Luego, notando que siempre se tiene o bien $v(p_1) \in \mathcal{D}$ o $v(p_1) \notin \mathcal{D}$, concluimos $\models_{SLPPL}$A2.

(A3) $(p_0 \wedge p_1) \to p_0$

- $v((p_0 \wedge p_1) \to p_0) = 1$
- $v(p_0 \wedge p_1) = 0$ o $v(p_0) \in \mathcal{D}$
- $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \notin \mathcal{D}$, o $v(p_0) \in \mathcal{D}$

Concluimos entonces $\models_{SLPPL}$A3

(A4) $(p_0 \wedge p_1) \to p_1$

- $v((p_0 \wedge p_1) \to p_1) = 1$
- $v(p_0 \wedge p_1) = 0$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$
- $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \notin \mathcal{D}$, o $v(p_1) \in \mathcal{D}$

De lo que se concluye $\models_{SLPPL}$A4

(A5) $(p_0 \to p_1) \to ((p_0 \to p_2) \to (p_0 \to (p_1 \wedge p_2)))$

- $v((p_0 \to p_1) \to ((p_0 \to p_2) \to (p_0 \to (p_1 \wedge p_2)))) = 0$
- $v(p_0 \to p_1) = 1$ y $v((p_0 \to p_2) \to (p_0 \to (p_1 \wedge p_2))) = 0$
- ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$) y ($v(p_0 \to p_2) = 1$ y $v(p_0 \to (p_1 \wedge p_2)) = 0$)
- ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$) y (($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_2) \in \mathcal{D}$) y ($v(p_0) \in \mathcal{D}$ y $v(p_1 \wedge p_2) = 0$))
- ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$) y (($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_2) \in \mathcal{D}$) y ($v(p_0) \in \mathcal{D}$ y ($v(p_1) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_2) \notin \mathcal{D}$)))
- ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o ($v(p_1) \in \mathcal{D}$ y $v(p_2) \in \mathcal{D}$)) y ($v(p_0) \in \mathcal{D}$ y ($v(p_1) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_2) \notin \mathcal{D}$)) (agrupando)

- $\diamond$ ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o ($v(p_1) \in \mathcal{D}$ y $v(p_2) \in \mathcal{D}$)) y no ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o ($v(p_1) \in \mathcal{D}$ y $v(p_2) \in \mathcal{D}$) (usando propiedades de la negacion, y su relación con la conjunción y disyunción en el lenguaje natural).

Notamos entonces que no hay forma de que $v(A5) = 0$, luego $\vDash_{SLPPL}$A5

(A6) $p_0 \to (p_0 \vee p_1)$

- $\diamond$ $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_0 \vee p_1) = 1$
- $\diamond$ $v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_0) \in \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$

De lo que se concluye $\vDash_{SLPPL}$A6

(A7) $p_1 \to (p_0 \vee p_1)$

- $\diamond$ $v(p_1) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_0 \vee p_1) = 1$
- $\diamond$ $v(p_1) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_0) \in \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$

De lo que se concluye $\vDash_{SLPPL}$A7

(A8) $(p_0 \to p_1) \to ((p_2 \to p_1) \to ((p_0 \vee p_2) \to p_1)$

- $\diamond$ $v((p_0 \to p_1) \to ((p_2 \to p_1) \to ((p_0 \vee p_2) \to p_1)) = 0$
- $\diamond$ $v((p_0 \to p_1) = 1$ y $v((p_2 \to p_1) \to ((p_0 \vee p_2) \to p_1)) = 0$
- $\diamond$ ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$) y $(v(p_2 \to p_1) = 1$ y $v((p_0 \vee p_2) \to p_1) = 0)$
- $\diamond$ ($v(p_0) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$) y $(v(p_2) \notin \mathcal{D}$ o $v(p_1) \in \mathcal{D}$) y $(v(p_0 \vee p_2) = 1$ y $v(p_1) \notin \mathcal{D})$
- $\diamond$ ($v(p_1) \in \mathcal{D}$ o $(v(p_0) \notin \mathcal{D}$ y $v(p_2) \notin \mathcal{D}$))y no $(v(p_1) \in \mathcal{D}$ o $(v(p_0) \notin \mathcal{D}$ y $v(p_2) \notin \mathcal{D}))$ (similar a ultimos dos pasos en A5)

Como no hay valuación algebráica que satisfaga $v(A_8) = 0$, tenemos $\vDash_{SLPPL}$A8

(A9) $(\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)$, para todos los tipos de fórmulas complejas P y Q. Como P (y Q) es una fórmula compleja, existen solo dos posibilidades para $v(P)$, estas son 0 y 1; y se tiene además $\{v(P), v(\neg P)\} = \{0, 1\}$ (lo mismo ocurre para Q). Luego se tiene las siguientes equivalencias:

- $\diamond$ $v((\neg P \to \neg Q) \to (Q \to P)) = 0$
- $\diamond$ $v((\neg P \to \neg Q) = 1$ y $v(Q \to P) = 0$
- $\diamond$ $(v(\neg P) = 0$ o $v(\neg Q) = 1)$ y ($v(Q) = 1$ y $v(P) = 0$)
- $\diamond$ ($v(P) = 1$ o $v(Q) = 0$) y $v(Q) = 1$ y $v(P) = 0$

Luego, como para ninguna valuación algebráica se tiene $v(A9) = 0$, concluimos $\vDash_{SLPPL}$A9. $\square$

Corolario 2.17. *Para todo conjunto de fórmulas bien formadas* Γ*, y cualquier* γ *en* $\mathcal{F}m$ *se tiene* $\Gamma \vDash_{SLPPL} \gamma$ *si y solo si* $\Gamma \vdash_{LPP} \gamma$.

Corolario 2.18. *Para todo conjunto de fórmulas bien formadas* Γ*, y cualquier* γ *en* $\mathcal{F}m$ *se tiene que si* $\Gamma \vDash_{SLPPL} \gamma$*, entonces existe un conjunto finito de fórmulas* Γ' *tal que* $\Gamma' \subseteq \Gamma$ *y* $\Gamma' \vDash_{SLPPL} \gamma$.

Demostración. Si $\Gamma \vDash_{SLPPL} \gamma$, entonces $\Gamma \vdash_{LPP} \gamma$ por el Corolario 2.17; pero entonces por la propiedad de la consecuencia lógica (Propiedad (1.5)) se tiene que existe un conjunto finito de fórmulas Γ' tal que $\Gamma' \subseteq \Gamma$ y $\Gamma' \vdash_{LPP} \gamma$, usando ahora nuevamente el Corolario 2.17, tenemos que para ese Γ' subconjunto finito de Γ, $\Gamma' \vDash_{SLPPL} \gamma$ □

Corolario 2.19. *Si* $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ *es una tautología clásica que no contiene negaciones, entonces* $\vdash_{LPPL} \varphi(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$*, para fórmulas* $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ *cualesquiera.*

Demostración. Observamos primero que si $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ es una fórmula compleja sin símbolos de negación, v es una valuación algebráica cualquiera, y se tiene $\vdash_{LPPL} \alpha_i \leftrightarrow \beta_i$ para $1 \leq i \leq n$; entonces

$$v\left(\varphi\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)\right) = v\left(\varphi\left(\beta_1, \ldots, \beta_n\right)\right)$$

La demostración es sencilla, se basa en la definición de las operaciones y que si se tiene $\vdash_{LPPL} \alpha_i \leftrightarrow \beta_i$, entonces se tiene $\vDash_{SLPPL} \alpha_i \leftrightarrow \beta_i$, lo que es equivalente a que para toda matriz y toda valuación algebráica v, $v(\alpha) \in \mathcal{D}$ si y solo si $v(\beta) \in \mathcal{D}$.

Sabemos además que, siendo CPC el cáluclo proposicional clásico, $\vDash_{CPC} \varphi\left(p_1, \ldots, p_n\right)$ si y solo si para toda valuación en $\mathcal{M} = \langle \{0, 1\}, \mathcal{D}, \sim \rangle$, $v(\varphi\left(p_1, \ldots, p_n\right)) = 1$. Sea $\alpha' = \alpha \vee \alpha$; consideremos entonces el hecho de que $\vdash_{LPPL} \alpha_i \leftrightarrow (\alpha_i')$; luego si $\varphi(p_1, \ldots, p_n)$ es una tautología clásica que no contiene negaciones; $\vDash_{CPC} \varphi\left(\alpha_1', \ldots, \alpha_n'\right)$; y por tanto

$$\vdash_{LPPL} \varphi\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_n\right)$$ □

2.2. Lógicas matriciales LPP y la tesis de Suszko

Durante los años 70s, Roman Suszko planteó que los únicos valores lógicos son los de veracidad y falsedad [Sus77]; distingue entonces los valores algebraicos de los valores lógicos. En nuestra definición de las lógicas matriciales, entonces, para definir la consecuencia estamos definiendo implicitamente lo que consideramos verdad. En términos generales la verdad se relaciona con la consecuencia de modo que si son verdaderas nuestras permisas, es verdadera nuestra conclusión, o equivalentemente, considerando como contrario a la verdad lo falso, si nuestra conclusión es falsa, entonces al menos una de nuestras premisas lo es. Podemos entender en nuestro caso entonces la verdad como la pertenencia al filtro, es decir, ser de los elementos designados; y la falsedad consiguientemente, con no pertenecer al filtro [3].

[3] Nuestro valor de falsedad como contrario a la verdad evidentemente está determinado por el hecho de que asumimos que los elementos no designados son el complemento de los valores designados

En este sentido, desde un punto de vista filosófico, el valor verdad es aquello que en una inferencia correcta se preserva de las premisas a las consecuencias. Nuestras distinciones en los valores algebraicos corresponden entonces a matices respecto al grado de falsedad o veracidad; en el caso de las lógicas definidas por matrices LPP basicamente respecto a su comportamiento frente a una negación.

Para ubicarnos en el contexto de las reducciones de sistemas lógicos a sistemas bivalentes necesitaremos algunas definiciones y algunos resultados importantes en el área. Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje proposicional, con variables proposicionales numerables y una cantidad finita no nula de conectivos finitarios $\mathcal{C} = \{c_1, \ldots, c_n\}$; y $\mathcal{F}m$ el conjunto de la fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L}$, llamaremos relación de consecuencia tarskiana a una relación "$\vdash$" $\subseteq\mathcal{P}(\mathcal{F}m)\times\mathcal{F}m$ para la cual se satisface:

$$\Delta \cup \{A\} \vdash A \text{ (Reflexividad)} \tag{2.12}$$

$$\text{Si } \Delta \vdash A \text{ entonces } \Delta \cup \Gamma \vdash A \text{ (Monotonicidad)} \tag{2.13}$$

$$\text{Si } \Delta \vdash A \text{ y } \Gamma \cup \{A\} \vdash B\text{, entonces } \Delta \cup \Gamma \vdash B \text{ (Corte o Transitividad)} \tag{2.14}$$

Para todo A,B en $\mathcal{F}m$ y cada Γ, $\Delta \subseteq\mathcal{F}m$.

Una relación de consecuencia Tarskiana se llama estructural si y solo si para todo $A \in \mathcal{D}$, y todo $\Delta\subseteq\mathcal{F}m$; vale para cualquier substitución[4]:

$$\Delta \vdash A \text{ si y solo si } \sigma(\Delta) \vdash \sigma(A) \text{ (Estructuralidad)} \tag{2.15}$$

Usualmente se le llama al par $(\mathcal{L}, \vdash)$ una lógica Tarskiana (Tarskiana estructural) si y solo si $\vdash$ es una consecuencia Tarskiana (Tarskiana y Estructural). Igual que en el capítulo introductorio, llamaremos matriz n-valuada a una estructura $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{D}, \{f_c : c \in \mathcal{C}\}\rangle$; donde M es un conjunto de cardinalidad $n \geq 2$, $\mathcal{D}$ un subconjunto propio de M, y cada f_c es un operador con la misma aridad que c. Los elementos de M serán entonces los valores de verdad, o grados de verdad, y los elementos de $\mathcal{D}$ serán los valores de verdad designados; lo que en términos de Suszko se traduce a que M son los valores algebráicos; y la pertenencia a $\mathcal{D}$ o la pertenencia a su complemento representan los dos valores de verdad lógicos. Una valuación es una función v de $\mathcal{F}m$ en M; así nuestras valuaciones agebráicas son un tipo especial de valuaciones, es decir, las que son un homomorfismo entre $(\mathcal{L}, c_1 \ldots c_m)$ y $(M, f_{c_1} \ldots f_{c_m})$. Un par $\mathcal{M} = \langle\mathfrak{M}, v\rangle$, donde $\mathfrak{M}$ es una matriz n-valuada y v una valuación en $\mathfrak{M}$ será llamado un modelo n-valuado con base en $\mathfrak{M}$; de manera similar a como definimos $\vDash_{\mathfrak{M}}$; tendremos que si $\mathcal{M} = \langle\mathfrak{M}, v\rangle$ es un modelo n-valuado, con $\mathfrak{M} = \langle M, \mathcal{D}, \{f_c : c \in \mathcal{C}\}\rangle$; $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}} \varphi$ si y solo si cada vez que $v(\Gamma)\subseteq\mathcal{D}$ se tiene $v(\varphi) \in \mathcal{D}$. Un modelo $\langle\mathfrak{M}, v\rangle$ es estructural si v es una valuación algebráica.

Diremos que una lógica Tarskiana $(\mathcal{L}, \vdash)$ es caracterizada por una matriz n-valuada $\mathfrak{M}$ si y solo si $\vdash$, la consecuencia del sistema lógico, es igual a $\vDash_{\mathfrak{M}}$; similarmente $(\mathcal{L}, \vdash)$ se dirá caracterizada por un modelo n-valuado $\mathcal{M}$ si y solo si $\vdash$ es igual a $\vDash_{\mathcal{M}}$. Diremos que una lógica $(\mathcal{L}, \vdash)$ está caracterizada por una clase $\mathfrak{R}$ de matrices n-valuadas (una clase $\mathfrak{R}$

[4]substitución es, como antes, cualquier endomorfismo del algebra absolutamente libre $\mathcal{F}m$

de modelos n-valuados) si y solo si, como relaciones:

$$\vdash = \bigcap \{\vDash_{\mathfrak{M}}, \mathfrak{M} \in \mathfrak{R}\}$$
$$(\vdash = \bigcap \{\vDash_{\mathcal{M}}, \mathcal{M} \in \mathfrak{R}\}).$$

Dada una lógica Tarskiana $(L, \vdash)$ y Γ un subconjunto cualquiera de $\mathcal{F}m$ llamaremos al conjunto $\mathcal{C}n(\Gamma) = \{A \in \mathcal{F}m : \Gamma \vdash A\}$ el conjunto de las consecuencias de Γ; las matrices de la forma $\langle \mathcal{F}m, \mathcal{C}n(\Gamma)\rangle$ son llamadas matrices de Lindenbaum de $\mathcal{L}$.

Wójcicki mostró en el año 1970 [Wój70] que toda lógica Tarskiana estructural $(\mathcal{L}, \vdash)$ está caracterizada por su "Lindenbaum bundle"; la clase de modelos n-valuados estructurales

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{L}} = \{\langle\langle \mathcal{F}m, \mathcal{C}n(X)\mathcal{C}\rangle, v\rangle :\ X \subseteq \mathcal{F}m,\ v \text{ valuación algebráica}\}$$

Por otro lado, Malinowski en el libro "Many-valued Logics" [Mal93], establece de manera explícita lo que es conocido como la reducción de Suszko, esto es: Toda logica Tarskiana estructural es caracterizada por una clase de modelos bivaluados. Esta bivaluación evidentemente no es siempre una valuación algebráica, y se lleva a cabo de manera natural.

Si $\mathcal{L}$ es un lenguaje proposicional cuyos conectivos son el conjunto $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}m$ el conjunto de fórmulas de $\mathcal{L}$ y $(\mathcal{L}, \vdash)$ una lógia tarskiana estructural; entonces

$$\mathfrak{L}_{\mathcal{L}} = \{\langle\langle \mathcal{F}m, \mathcal{C}n(X)\mathcal{C}\rangle, v\rangle :\ X \subseteq \mathcal{F}m,\ v \text{ valuación algebráica}\}$$

caracteriza $(\mathcal{L}, \vdash)$. Para un modelo estructural n-valuado $\mathcal{M} = \langle\langle \mathcal{F}m, \mathcal{F}, \{f_c : c \in \mathcal{C}\}\rangle, v\rangle$ definimos la función:

$$t_v(\alpha) = \begin{cases} 1, \text{ si } v(\alpha) \in \mathcal{F} \\ 0, \text{ si } v(\alpha) \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

De este modo, $(\mathcal{L}, \vdash)$ es caracterizada por la clase de modelos bivaluados

$$\mathfrak{S}_R = \{\langle\langle \{0,1\}, 1, \{f_c : c \in \mathcal{C}\}\rangle, t_v\rangle : \langle\langle \mathcal{F}m, \mathcal{F}, \{f_c : c \in \mathcal{C}\}\rangle, v\rangle \in \mathfrak{L}_{\mathcal{L}}\}$$

Ambas pruebas, dado que la segunda depende de la primera, no son constructivas, por tanto no presentan un método efectivo de obtener información útil sobre la lógica utilizando su caracterización por modelos bivaluados.

La hipótesis sobre estructuralidad puede desecharse bajo ciertas condiciones, como muestran Caleiro y col.[Cal+03b] y da Costa y col.[DC+96]. Además Caleiro y col. [Cal+03a] muestran una forma efectiva de asociar a un modelo estructural finitamente valuado, un modelo bivaluado equivalente; seguiremos entonces esta idea de Caleiro para analizar algunos ejemplos de lógicas asociadas a matrices LPP finitas.

En primer lugar notamos que las lógicas que analizaremos pueden ser presentadas como sistemas deductivos, es decir, a partir de axiomas y reglas de inferencia; pero tienen su contraparte matricial. Cuando se trabaja con matrices finitas tenemos estructuralidad, y por tanto una reducción de Suszko para estas lógicas; sin embargo la presentación en términos de $\mathfrak{L}_{\mathcal{L}}$ por si sola no entrega mayor información; entonces revisaremos una formalización que permita trabajar con la reducción de Suszko que dé cuenta de las características particulares del sistema deductivo.

Definición. Una semántica gentzeniana para una lógica $\mathcal{L}$ es un conjunto adecuado (correcto y completo) de bivaluaciones $b : \mathcal{F}m \rightarrow \{0, 1\}$ dada por fórmulas condicionales $(\Phi \rightarrow \Psi)$, donde Φ y Ψ son fórmulas de la forma $\top$(Top), $\bot$(Bottom) o

$$b(\varphi_1^1) = w_1^1, \ldots, b(\varphi_{n_1}^1) = w_{n_1}^1 | \ldots | b(\varphi_1^m) = w_1^m, \ldots, b(\varphi_{n_m}^m) = w_{n_m}^m \tag{2.16}$$

Donde para cada par i, j; $w_i^j \in \{0, 1\}$ y φ_j^i es una fórmula de $\mathcal{L}$. Las comas "," representan conjunciones y las barras | representan disyunciones; y las fórmulas están gobernadas por la lógica clásica.

Escribiremos, usando la forma natural que tienen las fórmulas en el lenguaje de la lógica proposicional clásica, una fórmula como en (2.16) de la forma:

$$\bigvee_{1 \leq s \leq m} \bigwedge_{1 \leq t \leq n_s} b(\varphi_t^s) = w_t^s.$$

Sabemos que para matrices LPP reducidas los valores son efectivamente separables, es decir, si $x \neq y$, exite una fórmula φ con una variable libre tal que $\{[\varphi](x), [\varphi](y)\} = \{0, 1\}$; además si la matriz es finita y reducida, digamos $\mathcal{D}$ el conjunto de los n elementos designados $\{d_1, \ldots, d_n\}$ y $\mathcal{U} = M - \mathcal{D}$ el conjunto de los m elementos no designados $\{u_1, \ldots, u_m\}$; podemos considerar para cada par (no ordenado) de elementos distintos en $\mathcal{F}$, d_i, d_j la fórmula φ_{d_i, d_j}[5] que satisface $\{[\varphi_{d_i,d_j}](d_i), [\varphi_{d_i,d_j}](d_j)\} = \{0, 1\}$, del mismo modo para cada par de elementos distintos en $\mathcal{U}$, u_i, u_j, existe una fórmula ψ_{d_i,d_j} que satisface $\{[\psi_{d_i,d_j}](d_i), [\psi_{d_i,d_j}](d_j)\} = \{0, 1\}$.

Recordamos que existe una función que describe estructura de la negación de una matriz $\mathcal{M}$; sea $\delta(a)$ el primer elemento de $nstr_{\mathcal{M}}(a)$. Tenemos entonces $\delta(a) = 1$ si y solo si $a \in \mathcal{D}$. Dada una valuación v algebráica (con valores en $\mathcal{M}$) consideramos la valuación [6] $t = \delta \circ v$.

Entonces para una matriz finita $\mathcal{M}$ como la descrita anteriormente se tiene:

$$v(x) = d_i \Leftrightarrow t(x) = 1, \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} t([\varphi_{d_j,d_i}](x)) = \varphi_{d_j,d_i}(d_i)$$

$$v(x) = u_i \Leftrightarrow t(x) = 0, \bigwedge_{\substack{1 \leq j \leq m \\ i \neq j}} t([\phi_{u_j,u_i}](x)) = \phi_{u_j,u_i}(u_i)$$

De este modo, dada una valuación algebráica v, tenemos para cada s_i valor en la matriz un sistema de ecuaciones de una variable $E_{s_i}(x)$ que se satisface si y solo si $v(x) = s_i$.

[5]Como se indica antes, no se considera el orden de los elementos, es decir, $\varphi_{d_i,d_j} = \varphi_{d_j,d_i}$

[6]En general no algebráica

Luego, dado un conectivo binario del lenguaje $\otimes$(es similar para el unario) y valores en la matriz s_0, s_1, s_2 tales que $\otimes(s_0, s_1) = s_2$; podemos expresar esta relacion de los valores usando nuestro (meta)lenguaje formal de la semántica gentzeniana de la forma

$$E_{s_0}(x), E_{s_1}(y) \to E_{s_2}(\otimes(x, y))$$

Obs: esta expresión está dada en términos de t, es decir, una valuación.

Teorema 2.20. *Dada una lógica $\mathcal{L}$, sea $\mathcal{B}$ el conjunto de valuaciones $b : \mathcal{F}m \to \{0, 1\}$ que satisfacen los axiomas obtenidos mediante el procedimiento anterior (es decir, los que se obtienen usando los conectivos del lenguaje y valores en la matriz, o si se quiere, usando la tabla de verdad de la lógica) unidos a los siguientes axiomas[7]:*

(G1) $\top \to b(\alpha) = 1 \mid b(\alpha) = 0$

(G2) $b(\alpha) = 1, b(\alpha) = 0 \to \bot$

(G3) $b(\alpha) = 1 \to \bigvee_{d \in \mathcal{F}} \bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} b([\varphi_{\{d_i, d_j\}}](\alpha)) = \delta([\varphi_{\{d_i, d_j\}}](d))$

(G4) $b(\alpha) = 0 \to \bigvee_{u \in \mathcal{U}} \bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} b([\phi_{\{u_i, u_j\}}](\alpha)) = \delta([\phi_{\{u_i, u_j\}}](u))$

Para todo $\alpha \in \mathcal{F}m$ Entonces $b = \delta \circ v$; para alguna v valuación algebráica de $\mathcal{F}m$ en $\mathcal{M}$.

Demostración. Sea $b \in \mathcal{B}$, definimos el homomorfismo $\overline{v}$ que extiende de manera natural la función $v : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$ definida por:

i $v(\alpha) = d$ si y solo si $b(\alpha) = 1$ y $b([\varphi_{\{d_i, d_j\}}](\alpha)) = \delta([\varphi_{\{d_i, d_j\}}](d))$ para todo $1 \leq i < j \leq n$

ii $v(\alpha) = u$ si y solo si $b(\alpha) = 0$ y $b([\phi_{\{u_i, u_j\}}](\alpha)) = \delta([\phi_{\{u_i, u_j\}}](u))$ para todo $1 \leq i < j \leq m$

Debemos verificar que está bien definido; en primer lugar, usando las condicionces G1 y G2 tenemos que para un α fijo se satisface exactamente una de las posibilidades: $b(\alpha) = 1$ o $b(\alpha) = 0$; por tanto podemos concluir, usando G3 o G4 respectivamente, que si $b(\alpha) = 1$ para algún d se satisface

$$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} b([\varphi_{\{d_i, d_j\}}](\alpha)) = \delta([\varphi_{\{d_i, d_j\}}](d))$$

y si $b(\alpha) = 0$ para algún d se satisface

$$\bigwedge_{1 \leq i < j \leq m} b([\phi_{\{u_i, u_j\}}](\alpha)) = \delta([\phi_{\{u_i, u_j\}}](u))$$

[7] Estos axiomas rescatan el comportamiento clásico de {0,1}, dado por la buena definición de la bivaluación, y el sentido de verdad de los elementos designados

Además sabemos que la secuencia de valores (indexados por i, j) $[\varphi_{\{d_i,d_j\}}](d); 1 \leq i < j \leq n$ determina unicamente un valor en $\mathcal{D}$ (respectivamente en $\mathcal{U}$). Luego v está bien definida en Var; la extendemos entonces al homomorfismo $\overline{v}$. Usando ahora que b satisface todos los axiomas provenientes de las operciones en $\mathcal{M}$, es directo probar que $\overline{v}$ satisface las propiedades (i) y (ii). Obtenemos de esto que $\overline{v}(\varphi) \in \mathcal{D}$ si y solo si $b(\varphi) = 1$; y por tanto $b = \delta \circ \overline{v}$. □

Corolario 2.21.

- ◇ *Para toda bivaluación* $b : \mathcal{F}m \to \{0, 1\}$ *en* $\mathcal{B}$ *existe un homomorfismo* $v_b : \mathcal{F}m \to \mathcal{M}$ *tal que*

  $$v_b(\alpha) \in \mathcal{D} \text{ si y solo si } b(\alpha) = 1, \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{F}m$$

- ◇ *Para todo homomorfismo* $v : \mathcal{F}m \to \mathcal{M}$ *existe una bivaluación* $b_v : \mathcal{F}m \to \{0, 1\}$ *en* $\mathcal{B}$ *tal que*

  $$b_v(\alpha) = 1 \text{ si y solo si } v(\alpha) \in \mathcal{D}, \text{ para todo } \alpha \in \mathcal{F}m$$

Usando ambos corolarios obtenemos la equivalencia entre nuestras dos nociones de consecuencia semantica en esta sección, es decir:

Teorema 2.22. *El conjunto de bivaluaciones gentzenianas* $\mathcal{B}$ *es adecuado para* $\mathcal{L}$*; esto es, para cualquier* $\Gamma \subseteq \mathcal{F}m$ *y cualquier* $\varphi \in \mathcal{F}m$ *se tiene:*

$$\Gamma \vDash \varphi \text{ si y solo si } \Gamma \vDash_{\mathcal{B}} \varphi$$

2.3. Algunos Ejemplos

A continuación revisamos las lógicas matriciales LPP definidas por matrices de 3 valores y el caso de la matriz de 4 valores que es a la vez paraconsistente y paracompleta; para cada una de ellas se entregará junto a la presentación matricial una axiomatización –con respectiva demostración de que es adecuada, usando el método de Kalmar– y la semántica gentzeniana correspondiente. Como la semántica gentzeniana se rige por la lógica clásica, reduciremos de inmediato los axiomas cuando sea posible usando las herramientas que la lógica clásica entrega.

2.3.1. Matrices de tres valores

Consideramos en esta sección las matrices de la forma $\langle\{0, \frac{1}{2}, 1\}, \mathcal{D}, \sim\rangle$. Como la matriz es LPP, solo tenemos que determinar el conjunto $\mathcal{D}$ y la función $\sim$ sobre $\frac{1}{2}$; las opciones para $\mathcal{D}$ son:

$$\mathcal{D}_1 = \{1\};\ \mathcal{D}_2 = \left\{\frac{1}{2}, 1\right\}$$

las posibilidades para $\sim$ son:

$$\sim_1 \frac{1}{2} = \frac{1}{2};\ \sim_2 \frac{1}{2} = 1;\ \sim_3 \frac{1}{2} = 0.$$

Las matrices asociadas a las combinaciones $\{\mathcal{D}_1, \sim_2\}$ y $\{\mathcal{D}_2, \sim_3\}$ no son genuinamente de tres valores; pues se pueden reducir a la (única) matriz LPP de dos valores $\langle \{0,1\}, \{1\}, \sim\rangle$; en el primer caso $nstr_{\mathcal{M}}(\frac{1}{2}) = nstr_{\mathcal{M}}(0)$ y en el segundo $nstr_{\mathcal{M}}\left(\frac{1}{2}\right) = nstr_{\mathcal{M}}(1)$. Las otras combinaciones dan lugar a matrices genuinamente trivaluadas, todas distintas entre ellas:

$$\mathcal{M}_{1,1} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \mathcal{D}_1, \sim_1 \right\rangle \qquad \mathcal{M}_{1,3} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \mathcal{D}_1, \sim_3 \right\rangle$$
$$\mathcal{M}_{2,1} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \mathcal{D}_2, \sim_1 \right\rangle \qquad \mathcal{M}_{2,2} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \mathcal{D}_2, \sim_2 \right\rangle$$

Cada una de estas matrices, por separado,daorigen a una lógica matricial; estudiaremos cada una de ellas por separado. Cada uno de los sitemas lógicos tendrá una sección propia, de modo que usaremos la notación $\vdash$ y $\vDash$ en vez de los correspondientes $\vdash_{\mathcal{M}}$ y $\vDash_{\mathcal{M}}$. Además, usaremos la notación $\alpha^{\bullet} = \alpha \vee \neg\alpha$ y $\alpha^{\circ} = \neg(\alpha \wedge \neg\alpha)$

Observamos que en cualquier sistema deductivo $\langle \mathcal{L}, \vdash_{\mathcal{S}}\rangle$ con Modus Ponens en que $\vdash A$ para todo A axioma de SLPPL se tiene que si α es compleja, entonces $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha^{\bullet}$ y $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}} \alpha^{\circ}$.

Para cada una de las lógicas matriciales analizaremos en primer lugar la semántica gentzeniana equivalente y luego mostraremos una axiomatización como sistema deductivo, demostrando en cada uno de los casos la equivalencia, es decir, corrección y completud. Las axiomatizaciones corresponden a las que aparecen en [LM06].

2.3.1.1. $\mathcal{M}_{1,1} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \mathcal{D}_1, \sim_1 \right\rangle$

Las tablas de operaciones para este sistema son las siguientes:

	0	$\frac{1}{2}$	1
$\sim$	1	$\frac{1}{2}$	0

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
1	0	0	1

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	1
$\frac{1}{2}$	0	0	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
1	0	0	1

<u>Semántica Bivaluada</u>

En primer lugar necesitamos fórmulas que separen los valores en la matriz, para matrices de tres valores siempre será un proceso sencillo:

$$
\begin{aligned}
x = 0 &\ \text{ si y solo si } \ t(x) = 0, t(\sim x) = 1 \\
x = \frac{1}{2} &\ \text{ si y solo si } t(x) = 0, t(\sim x) = 0 \\
x = 1 &\ \text{ si y solo si } \ t(x) = 1
\end{aligned}
$$

Estas fórmulas evidentemente están determinadas por la estructura de negación de los elementos de la matriz, pero como solo necesitaremos los primeros valores, éstas pueden coincidir para matrices distintas.

La primera tabla, que es común a la otra matriz con la función $\sim_1$ nos entrega las siguientes ecuaciones en $\mathcal{M}_{1,1}$:

$$
\begin{gathered}
E_0(\alpha) \to E_1(\sim \alpha) \\
E_{\frac{1}{2}}(\alpha) \to E_{\frac{1}{2}}(\sim \alpha) \\
E_1(\alpha) \to E_0(\sim \alpha)
\end{gathered}
$$

Lo que nos entrega los siguientes axiomas para la semántica gentzeniana:

$$b(\alpha) = 0, b(\neg\alpha) = 1 \to b(\neg\alpha) = 1 \tag{2.17}$$

$$b(\alpha) = 0, b(\neg\alpha) = 0 \to b(\neg\alpha) = 0, b(\neg\neg\alpha) = 0 \tag{2.18}$$

$$b(\alpha) = 1 \to b(\neg\alpha) = 0, b(\neg\neg\alpha) = 1 \tag{2.19}$$

Nuestra primera observación es que la fórmula (2.17) no entrega información; así, nos podemos quedar solo con las fórmulas (2.18) y (2.19).

La segunda tabla corresponde a la estructura de la matriz en torno a la implicancia; por tanto es idéntica para matrices de tres valores con los mismos elementos designados. Observaremos luego que puede reducirse en todas las matrices exactamente del mismo modo, independiente de que los sistemas de ecuaciones que determinen los valores de la matriz sean distintos, debido a que está definida en términos de la pertenencia de los elementos al conjunto designado de la matriz, y por tanto en términos de expresiones del estilo: $b(\alpha) = 0$ o $b(\beta) = 1$.

$$\begin{array}{ccc}
E_0(\alpha), E_0(\beta) \to E_1(\alpha \to \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \to E_1(\alpha \to \beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha \to \beta) \\
E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha \to \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha \to \beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_0(\alpha \to \beta) \\
E_0(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha \to \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha \to \beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha \to \beta)
\end{array}$$

Esto nos entrega nueve fórmulas que serán axiomas de la semántica gentzeniana asociada; no las escribiremos de manera explícita de inmediato, porque haremos antes las reducciones.

Escribiremos las instancias de G3 y G4 para esta matriz.

(G1)$_{1,1}$ $\top \to b(\alpha) = 1 \mid b(\alpha) = 0$

(G2)$_{1,1}$ $b(\alpha) = 1, b(\alpha) = 0 \to \bot$

(G3)$_{1,1}$ $b(\alpha) = 1 \to E_1(\alpha)$

(G4)$_{1,1}$ $b(\alpha) = 0 \to E_0(\alpha) \mid E_{\frac{1}{2}}(\alpha)$

De (G1)$_{1,1}$, (G3)$_{1,1}$ y (G4)$_{1,1}$ obtenemos:

$$\top \to E_0(a) \mid E_{\frac{1}{2}}(a) \mid E_1(a) \tag{2.20}$$

Luego, podemos colapsar las filas de las primeras dos columnas, obteniendo:

$$E_0(\alpha) \to E_1(\alpha \to \beta) \tag{2.21}$$
$$E_{\frac{1}{2}}(\alpha) \to E_1(\alpha \to \beta) \tag{2.22}$$

Además, usando, usando (G4)$_{1,1}$, reducimos (2.21) y (2.22) a:

$$b(\alpha) = 0 \to E_1(\alpha \to \beta)$$

Por otro lado, usando nuevamente (G4)$_{1,1}$; podemos sintetizar las dos primeras filas de la última columna en la fórmula:

$$b(\alpha) = 1, b(\beta) = 0 \to E_0(\alpha \to \beta)$$

Y finalmente, usando (2.20), sintetizamos la última fila por:

$$b(\beta) = 1 \rightarrow E_1(\alpha \rightarrow \beta)$$

Es momento de traducir entonces estas expresiones referentes a la estructura de la implicación a bivaluaciones:

$$\begin{gathered} b(\alpha) = 0 \rightarrow b(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \\ b(\beta) = 1 \rightarrow b(\alpha \rightarrow \beta) = 1 \\ b(\alpha) = 1, b(\beta) = 0 \rightarrow b(\alpha \rightarrow \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \rightarrow \beta)\right) = 1 \end{gathered}$$

Por último notamos que (G3)$_{1,1}$ es trivial y (G4)$_{1,1}$ es consecuencia de G1.

Las tablas para $\vee$ y $\wedge$ nos entregan la siguiente información:

$$\begin{array}{ccc} E_0(\alpha), E_0(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \vee \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \vee \beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \rightarrow E_1(\alpha \vee \beta) \\ E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \vee \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \vee \beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \rightarrow E_1(\alpha \vee \beta) \\ E_0(\alpha), E_1(\beta) \rightarrow E_1(\alpha \vee \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \rightarrow E_1(\alpha \vee \beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \rightarrow E_1(\alpha \vee \beta) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E_0(\alpha), E_0(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \wedge \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \wedge \beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \wedge \beta) \\ E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \wedge \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \wedge \beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \wedge \beta) \\ E_0(\alpha), E_1(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \wedge \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \rightarrow E_0(\alpha \wedge \beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \rightarrow E_1(\alpha \wedge \beta) \end{array}$$

Reducimos como antes y obtenemos las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} b(\alpha)=0,b(\beta)=0 &\rightarrow b(\alpha\vee\beta)=0, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right)=1\\ b(\alpha)=1 &\rightarrow b(\alpha\vee\beta)=1\\ b(\beta)=1 &\rightarrow b(\alpha\vee\beta)=1\\ b(\alpha)=0 &\rightarrow b(\alpha\wedge\beta)=0, b\left(\neg(\alpha\wedge\beta)\right)=1\\ b(\beta)=0 &\rightarrow b(\alpha\wedge\beta)=0, b\left(\neg(\alpha\wedge\beta)\right)=1\\ b(\alpha)=1,b(\beta)=1 &\rightarrow b(\alpha\wedge\beta)=1 \end{aligned}$$

Los axiomas que definen las bivaluaciones son:

- ⋄ G1
- ⋄ G2
- ⋄ $\mathrm{G}^1_{1,1}: b(\alpha)=0, b(\neg\alpha)=0 \rightarrow b(\neg\neg\alpha)=0$
- ⋄ $\mathrm{G}^2_{1,1}:$

$$\begin{aligned} b(\alpha)=1 \rightarrow\ & b(\neg\alpha)=0, b(\neg\neg\alpha)=1,\\ & b(\alpha\vee\beta)=1,\\ & b(\beta\vee\alpha)=1,\\ & b(\beta\rightarrow\alpha)=1 \end{aligned}$$

- ⋄ $\mathrm{G}^3_{1,1}:$

$$\begin{aligned} b(\alpha)=0 \rightarrow\ & b(\alpha\rightarrow\beta)=1,\\ & b(\alpha\wedge\beta)=0, b\left(\neg(\alpha\wedge\beta)\right)=1,\\ & b(\beta\wedge\alpha)=0, b\left(\neg(\beta\wedge\alpha)\right)=1 \end{aligned}$$

- ⋄ $\mathrm{G}^4_{1,1}: b(\alpha)=1, b(\beta)=0 \rightarrow b(\alpha\rightarrow\beta)=0, b\left(\neg(\alpha\rightarrow\beta)\right)=1$
- ⋄ $\mathrm{G}^5_{1,1}: b(\alpha)=0, b(\beta)=0 \rightarrow b(\alpha\vee\beta)=0, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right)=1$
- ⋄ $\mathrm{G}^6_{1,1}: b(\alpha)=1, b(\beta)=1 \rightarrow b(\alpha\wedge\beta)=1$

En lo sucesivo, haremos estas reducciones sin hacer explícito cada paso.

Sistema Deductivo $\mathcal{S}_{1,1}$

En lo sucesivo utilizaremos algunos resultados evidentes relativos a $\vdash_{SLPPL}$, explicitando que se trata de resultados de aquel sistema deductivo sin haberlos mencionado antes, ya que son de fácil verificacion usando completud en aquel sistema.

La siguiente axiomatización aparece en [Mar99] bajo el nombre I^1_2; la única regla de inferencia es Modus Ponens y los axiomas son:

$A_{1,1}1$ Los axiomas de SLPPL

$A_{1,1}2$ $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$

$A_{1,1}3$ $\alpha^{\bullet} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))$

Para este sistema, y los siguientes, tenemos el teorema de deducción, para ver este hecho basta con notar que en la demostración de aquel teorema solo usamos los dos primeros axiomas y que la única regla de inferencia es MP. Del mismo modo tenemos todos los Corolarios del Teorema de Deducción 2.6-2.9, el Teorema 2.10, y los Lemas 2.12 y 2.11

Demostraremos en primer lugar que se trata de axiomas correctos, es decir, que se tiene $\vDash_{\mathcal{M}_{1,1}} A$ para los axiomas $A_{1,1}2$ y $A_{1,1}3$.

$A_{1,1}2$ Dada una valuación (algebráica) v en $\mathcal{M}_{1,1}$ es trivial para los casos $v(\alpha) = 1$ y $v(\alpha) = 0$ que se satisface $v(\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha) = 1$; por otro lado, en $\mathcal{M}_{1,1}$ se satisface $\sim^{k} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, luego es inmediato también que para $v(\alpha) = \frac{1}{2}$ se satisface

$$v(\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha) = 1$$

$A_{1,1}3$ Para que se tenga $v(\alpha^{\bullet} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))) = 0$ se debe tener

$$\begin{aligned} v(\alpha^{\bullet}) &= 1 \\ v\left((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha)\right) &= 0 \end{aligned}$$

Pero como $[\frac{1}{2}]^{\bullet} = 0$, tenemos de la primera ecuación que $v(\alpha) = 1$ o $v(\alpha) = 0$; por otro lado, de la segunda ecuación tenemos $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$ y $v((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha) = 0$; lo que se traduce, junto a lo entregado por la primera ecuación, en $v(\alpha \rightarrow \beta) = 1$; $v(\alpha \rightarrow \neg\beta) = 1$ y $v(\alpha) = 1$; luego necesitamos que $v(\beta) \in F$ y $v(\neg\beta) \in F$, es decir $v(\beta) = 1$ y $v(\neg\beta) = 1$; y dicha valuación no existe, luego toda valuación v (algebráica) satisface

$$v(\alpha^{\bullet} \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))) = 1$$

Como los axiomas de SLPPL son correctos, y lo es también la regla de inferencia MP; tenemos que si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{1,1}} \varphi$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{1,1}} \varphi$

Lema 2.23. *En $\mathcal{S}_{1,1}$ se satisface:*

1. $\neg(\beta \vee \neg\beta) \vdash \neg\left(\neg^{k}\beta \vee \neg^{k+1}\beta\right)$

2. $\beta, \neg\beta \vdash \gamma$

3. $\beta, \neg(\beta \wedge \beta) \vdash \gamma$

4. $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$

5. $\beta, \neg(\gamma \wedge \gamma) \vdash \neg(\beta \to \gamma)$

6. $\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$

7. $\neg(\beta \wedge \beta) \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$

8. $\neg(\gamma \wedge \gamma), \neg\beta \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$

9. $\neg(\beta^{\bullet}) \vdash \neg(\beta \wedge \beta)$

Demostración. Los puntos 3, 5, 7 y 9 son resultados de SLPPL, fáciles de verificar mediante valuaciones, pero que igualmente demostraremos usando los axiomas de SLPPL. Se puede observar que se utiliza el axioma $\mathrm{A}_{1,1}2$ solo en el primer Lema y en el resto se utiliza $\mathrm{A}_{1,1}3$.

1. Basta con observar que se tiene $\alpha \leftrightarrow \neg^{2n}\alpha$ y $\neg\alpha \leftrightarrow \neg^{2m+1}\alpha$; tomando $\alpha = \beta$ y $\alpha = \neg\beta$, para cualquier n, m entero no negativo. Luego por el Corolario 2.19 tenemos

$$\neg(\beta \vee \neg\beta) \vdash \neg\left(\neg^{k}\beta \vee \neg^{k+1}\beta\right) \tag{2.23}$$

2. Sea α una tautología de SLPPL cualquiera, como por ejemplo $p \to p$. Tenemos entonces lo siguiente, usando propiedades de SLPPL:

$$\vdash \alpha^{\bullet}$$
$$\beta \vdash \alpha \to \beta$$
$$\neg\beta \vdash \alpha \to \neg\beta$$

Usamos estos resultados y el axioma $\mathrm{A}_{1,1}3$ para obtener usando MP que $\beta, \neg\beta \vdash \neg\alpha$; luego, como $\neg\beta, \beta \vdash \alpha$ se tiene que $\{\beta, \neg\beta\}$ es trivial; es decir, para cualquier fórmula γ se tiene

$$\neg\beta, \beta \vdash \gamma$$

3. Sabemos que $\beta \vdash \beta \wedge \beta$; luego usando que $\{\beta \wedge \beta, \neg(\beta \wedge \beta)\}$ es trivial tenemos

$$\beta, \neg(\beta \wedge \beta) \vdash \gamma$$

4. Para demostrar que $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \to \gamma)$ nos bastará con demostrar que $\beta \wedge \beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \to \gamma)$. Por el Lema 2.11 basta con demostrar $\beta \to \gamma, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \wedge \beta)$; por otro lado sabemos que
$\beta \to \gamma \vdash (\beta \wedge \beta) \to \gamma$. Además usando el axioma $\mathrm{A}_{1,1}3$ tenemos

$$(\beta \wedge \beta)^{\bullet} \to (((\beta \wedge \beta) \to \gamma) \to (((\beta \wedge \beta) \to \neg\gamma) \to \neg(\beta \wedge \beta)))$$

Usando Modus Ponens obtenemos lo que queríamos, es decir, $\beta \to \gamma, \neg\gamma \vdash \neg(\beta \wedge \beta)$.

5. Para demostrar que $\beta, \neg(\gamma \wedge \gamma) \vdash \neg(\beta \to \gamma)$ basta, por el Lema 2.11 con demostrar $\beta, \beta \to \gamma \vdash \gamma \wedge \gamma$; pero sabemos que $\beta, \beta \to \gamma \vdash \gamma$ y $\gamma \vdash \gamma \wedge \gamma$; obteniendo asi el resultado que buscábamos.

6. Sustituímos en el axioma $A_{1,1}3$ α por $\beta \wedge \gamma$. tenemos entonces

$$(\beta \wedge \gamma)^{\bullet} \to ((\beta \wedge \gamma) \to \beta) \to (((\beta \wedge \gamma) \to \neg(\beta \wedge \gamma)))$$

por otro lado por el Corolario 2.7 se tiene $\neg\beta \vdash \alpha \to \neg\beta$ y del axioma A3 de SLPPL tenemos $\beta \wedge \gamma \vdash \beta$, luego usando que se tiene $\vdash \alpha^{\bullet}$ para cualquier α compleja; y aplicando MP se tiene que

$$\neg\beta \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$$

7. Por el Corolario 2.7 sabemos que $\neg(\beta \wedge \beta) \vdash \gamma \to \neg(\beta \wedge \beta)$. Por otro lado, $\vdash_{SLPPL} (\gamma \to \neg(\beta \wedge \beta)) \to \neg(\beta \wedge \gamma)$, finalmente usando MP se obtiene lo buscado.

8. Primero observamos que se tiene de SLPPL $\neg(\gamma \wedge \gamma) \vdash (\beta \vee \gamma) \to \beta$ y que por el Corolario 2.7 se tiene $\neg\beta \vdash \alpha \to \neg\beta$ para cualquier α, en particular para $\alpha = \beta \vee \gamma$; por otro lado si reemplazamos en el axioma $A_{1,1}3$ α por $\beta \vee \gamma$ obtenemos

$$(\beta \vee \gamma)^{\bullet} \to ((\beta \vee \gamma) \to \beta) \to (((\beta \vee \gamma) \to \neg(\beta \vee \gamma)))$$

Ahora usamos MP y conluimos que

$$\neg(\gamma \wedge \gamma), \neg\beta \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$$

9. Usando contraposición (Lema 2.11) tenemos que nos basta con demostrar $(\beta \wedge \beta) \vdash (\beta \vee \neg\beta)$, pero de la lógica SLPPL sabemos $\beta \wedge \beta \vdash \beta$ y $\beta \vdash \beta \vee \neg\beta$; luego terminamos la demostración usando MP. □

A continuación demostraremos que el sistema es completo usando el método de Kalmar, utilizado usualmente para demostrar la completud en CPC.

Lema 2.24. *Sea α una fórmula cuyas variables proposicionales están en el conjunto $\{p_1 \dots p_n\}$. Para una valuación (algebráica) v se define:*

$$\alpha' = \begin{cases} \alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \neg(\alpha \wedge \alpha), & \textit{si } v(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \neg\alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases} \qquad \overline{\alpha} = \begin{cases} \alpha^{\bullet}, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \neg(\alpha^{\bullet}), & \textit{si } v(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \alpha^{\bullet}, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Entonces $\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p'_1, \dots, p'_n \vdash_{S_{1,1}} \alpha'$

Demostración. En primer lugar observamos que para cualquier valuación v y fórmula α se tiene que si α' y $\overline{\alpha}$ están definidos por v, entonces $v(\alpha') = 1 = v(\overline{\alpha})$; esperamos entonces que nuestras hipótesis no sean contradictorias, es decir, que no se trata de una conclusión trivial. Demostramos el Lema por inducción sobre el tamaño de la fórmula.

◇ Si $\alpha = p$, se tiene $\alpha' = p'$, luego, como $p' \vdash_{S_{1,1}} p'$ se satisface el Lema

◇ Si $\alpha = \neg\beta$, entonces α y β comparten las variables proposicionales; tendremos distintos casos dependiendo del valor de la valuación en β.

- Si $\beta^v = 1$, entonces $\alpha^v = 0$, por tanto $\beta' = \beta$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg\neg\beta$. Luego por hipótesis de inducción se tiene

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \beta$$

y por axioma $A_{1,1}2$ se tiene

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \alpha'$$

- Si $\beta^v = 0$, entonces $\alpha^v = 1$, por tanto $\beta' = \neg\beta = \alpha = \alpha'$. Por hipótesis de inducción se tiene lo buscado

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \alpha'$$

- Si $\beta^v = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha^v = \frac{1}{2}$, por tanto $\beta' = \neg(\beta \wedge \beta)$ y $\alpha' = \neg(\alpha \wedge \alpha)$. Además, dada la definición de las operaciones en la matriz, se tiene que $\beta = \neg^k p$ y $\alpha = \neg^{k+1} p$. Así tenemos $\overline{p} = \neg(p \vee \neg p)$ y por lemma 2.23,1 se tiene $\overline{p} \vdash_{\mathcal{S}_{1,1}} \neg(\alpha \vee \neg\alpha)$ y por Lema 2.23,9 tenemos $\overline{p} \vdash_{\mathcal{S}_{1,1}} \alpha'$.

◇ Si $\alpha = \beta \to \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v \notin \mathcal{D}_1$ se tiene $\alpha^v = 1$, y por tanto $\alpha' = \alpha = \beta \to \gamma$ y $\beta' = \neg\beta$ o $\beta' = \neg(\beta \wedge \beta)$; por hipótesis de inducción entonces se tiene $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \beta'$ y por Lema 2.23,2 o 2.23,3 respectivamente se tiene

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n', \beta \vdash_{S_{1,1}} \gamma$$

y por El Teorema de Deducción

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \alpha$$

- Si $\gamma^v = 1$ se tiene que $\alpha^v = 1$, y por tanto $\alpha' = \alpha = \beta \to \gamma$ y $\gamma' = \gamma$, por hipótesis de inducción $\overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \gamma$ y finalmente, por el Coroloario 2.7 se tiene lo buscado.
- Si $\beta^v = 1$ y $\gamma^v \notin \mathcal{D}_1$ entonces $\alpha^v = 0$, y por tanto $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \to \gamma)$, $\beta' = \beta$ y $\gamma' = \neg\gamma$ o $\gamma' = \neg(\gamma \wedge \gamma)$; luego por hipótesis de inducción tenemos

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \beta$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \gamma'$$

y por Lema 2.23,4 o 2.23,5 concluímos.

◇ Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v = \gamma^v = 0$, entonces $\alpha^v = 0$ y se tiene $\beta' = \neg\beta$, $\gamma' = \neg\gamma$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \wedge \gamma)$. tenemos por hipótesis entonces

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash_{S_{1,1}} \neg\beta$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash_{S_{1,1}} \neg\gamma$$

  y por Lema 2.23,6 se tiene lo buscado.

- Si $\beta^v = \frac{1}{2}$ o $\gamma^v = \frac{1}{2}$ se tiene respectivamente $\beta' = \neg\beta \wedge \beta$ o $\gamma' = \neg\gamma \wedge \gamma$, en cualquiera de los dos casos se tiene $\alpha^v = 0$ y por tanto $\alpha' = \neg\alpha$ en cualquiera de los dos casos (usando el ajuste necesario de cambiar $(\beta \vee \gamma)$ por $(\gamma \vee \beta)$) se tiene por la hipótesis de inducción y el Lema 2.23,7 lo buscado.

- Si $\beta^v = 1 = \gamma^v$, entonces $\alpha^v = 1$, y por tanto $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ y $\alpha' = \alpha = \beta \wedge \gamma$; luego por el Corolario 2.9 se tiene lo buscado.

◇ Si $\alpha = \beta \vee \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v = 1$ o $\gamma^v = 1$ se tiene $\alpha^v = 1$; además respectivamente se tiene $\beta' = \beta$ o $\gamma' = \gamma$; por tanto, notando que $\alpha' = \alpha$ basta con usar la hipótesis de inducción, respectivamente,

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n, \beta \vdash_{S_{1,1}} \beta \text{ o}$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n, \beta \vdash_{S_{1,1}} \gamma$$

  pues luego usamos los axiomas A6 o A7 de SLPPL para concluir lo buscado.

- Si $\beta^v = \frac{1}{2} = \gamma^v = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha^v = 0$, y por tanto $\beta' = \neg(\beta \wedge \beta)$, $\gamma' = \neg(\gamma \wedge \gamma)$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \vee \gamma)$; luego usando que en SLPPL se tiene

$$\neg(\gamma \wedge \gamma), \neg(\beta \wedge \beta) \vdash \neg(\gamma \vee \beta)$$

  basta con usar la hipótesis y modus ponens para demostrar

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n, \beta \vdash_{S_{1,1}} \neg\alpha$$

- Si $\beta^v = 0$ y $\gamma^v = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha^v = 0$ y se tiene $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \vee \gamma)$, $\beta' = \neg\beta$ y $\gamma' = \neg(\gamma \wedge \gamma)$. Tenemos por hipótesis entonces

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash_{S_{1,1}} \neg\beta$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash_{S_{1,1}} \neg(\gamma \wedge \gamma)$$

  y por Lema 2.23,8 se tiene lo buscado.

- Si $\beta^v = \frac{1}{2}$ y $\gamma^v = 0$, se procede similar al caso anterior, usando la modificación natural del Lema 2.23,8, usando que son equivalentes (y equidemostrables) en SLPPL las fórmulas $\neg(\beta \vee \gamma)$ y $\neg(\gamma \vee \beta)$. □

Lema 2.25. *Sea α una $\mathcal{M}_{1,1}$-tautología; entonces se tiene* $\vdash_{\mathcal{S}_{1,1}} \alpha$.

Demostración. Como α es una tautología, para cualquier valuación (algebráica) v se tiene $v(\alpha) = 1$, lo que implica que sin depender de la valuación escogida para la definición, $\alpha' = \alpha$. Sean $p_1, \ldots, p_n$ las variables proposicionales que aparecen en α. Supongamos que para algún $m \leq n$ se tiene que toda valuación $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, p'_1, \ldots, p'_m \vdash_{S_{1,1}} \alpha$, donde $\overline{\beta}$ y β' se definen por la valuación. Escogemos tres valuaciones v_1, v_2, v_3 que coinciden en $\langle p_1, \ldots, p_{m-1}\rangle$ y tales que $v_1(p_m) = 1$, $v_2(p_m) = \frac{1}{2}$ y $v_3(p_m) = 0$. Usando la hipótesis se tiene que:

$$\Sigma, p_m^\bullet, p_m \vdash \alpha \tag{2.24}$$
$$\Sigma, \neg(p_m^\bullet), \neg(p_m \wedge p_m) \vdash \alpha \tag{2.25}$$
$$\Sigma, p_m^\bullet, \neg p_m \vdash \alpha \tag{2.26}$$

Donde $\Sigma = \left\langle \overline{p_1}, \ldots, \overline{p_{m-1}}, p'_1, \ldots, p'_{m-1} \right\rangle$, definido por cualquiera de las tres valuaciones, dado que coinciden en $\langle p_1, \ldots, p_{m-1}\rangle$. De (2.24) y (2.26) obtenemos por el Teorema 2.5 respectivamente

$$\Sigma, p_m^\bullet \vdash p_m \to \alpha$$
$$\Sigma, p_m^\bullet \vdash \neg p_m \to \alpha$$

Luego, usando el Axioma A8 de SLPPL y MP obtenemos $\Sigma, p_m^\bullet \vdash (p_m \vee \neg p_m) \to \alpha$; es decir

$$\Sigma, p_m^\bullet \vdash p_m^\bullet \to \alpha$$

y nuevamente por MP y usando el Teorema 2.5

$$\Sigma \vdash p_m^\bullet \to \alpha \tag{2.27}$$

Por otro lado, en (2.25) podemos eliminar $\neg(p_m \wedge p_m)$, usando el Lema 2.23,9; obteniendo por el Teorema 2.5

$$\Sigma \vdash \neg p_m^\bullet \to \alpha \tag{2.28}$$

Finalmente, sabemos que $\vdash (p_m^\bullet)^\bullet$, luego usando nuevamente el axioma A8 de SLPPL y MP resulta

$$\Sigma \vdash \alpha \tag{2.29}$$

Observamos además que los valores sobre $\langle p_1, \ldots, p_{m-1}\rangle$ de las valuaciones son arbitrarios (aunque comunes a v_1,v_2 y v_3), luego sin importar la valuación usada para la definición de $\overline{\beta}$ y β' se satisface (2.29).

Aplicando el Lema 2.24 se tiene el caso base de $n = m$, luego aplicando lo demostrado podemos eliminar de la hipótesis una a una las n variables proposicionales que aparecen en α; llegando a

$$\vdash \alpha$$

□

Teorema 2.26. *Completud para $S_{1,1}$: Si para toda $\mathcal{M}_{1,1}$-tautología se tiene $\vdash_{\mathcal{S}_{1,1}} \alpha$; entonces si $\Sigma \vDash_{\mathcal{M}_{1,1}} \alpha$ entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}_{1,1}} \alpha$.*

Demostración. Basta para concluir esto con observar que si $\Sigma \vDash_{\mathcal{M}_{1,1}} \alpha$, entonces existe un $\Sigma' \subseteq \Sigma$ finito tal que $\Sigma' \vDash_{\mathcal{M}_{1,1}} \alpha$, y que si $\Sigma' = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_n \rangle$, entonces se tiene $\vDash_{\mathcal{M}_{1,1}} \sigma_1 \rightarrow (\sigma_2 \rightarrow (\cdots (\sigma_n \rightarrow \alpha)))$. Así se tiene usando el Lema anterior y MP $\Sigma' \vdash_{\mathcal{S}_{1,1}} \alpha$, y por tanto $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}_{1,1}} \alpha$. □

2.3.1.2. $\mathcal{M}_{1,3} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \mathcal{D}_1, \sim_3 \right\rangle$

Las tablas de operaciones para este sistema son las siguientes:

	0	$\frac{1}{2}$	1
$\sim$	1	0	0

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
1	0	0	1

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	1
$\frac{1}{2}$	0	0	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	0	0
1	0	0	1

Semántica Bivaluada

Primero necesitamos fórmulas que separen los valores en la matriz.

$$x = 0 \text{ si y solo si } t(x) = 0, t(\sim x) = 1$$
$$x = \frac{1}{2} \text{ si y solo si } t(x) = 0, t(\sim x) = 0$$
$$x = 1 \text{ si y solo si } t(x) = 1$$

La primera tabla nos entrega las siguientes ecuaciones en $\mathcal{M}_{1,3}$:

$$E_0(\alpha) \rightarrow E_1(\sim \alpha)$$
$$E_{\frac{1}{2}}(\alpha) \rightarrow E_0(\sim \alpha)$$
$$E_1(\alpha) \rightarrow E_0(\sim \alpha)$$

Lo que nos entrega los siguientes axiomas para la semántica gentzeniana:

$$b(\alpha) = 0, b(\neg\alpha) = 1 \to b(\neg\alpha) = 1 \tag{2.30}$$
$$b(\alpha) = 0, b(\neg\alpha) = 0 \to b(\neg\alpha) = 0, b(\neg\neg\alpha) = 1 \tag{2.31}$$
$$b(\alpha) = 1 \to b(\neg\alpha) = 0, b(\neg\neg\alpha) = 1 \tag{2.32}$$

La fórmula (2.30) no entrega información; así, nos podemos quedar solo con las fórmulas (2.31) y (2.32).

Escribiremos las instancias de G3 y G4 para esta matriz.

(G1)$_{1,3}$ $\top \to b(\alpha) = 1 \mid b(\alpha) = 0$

(G2)$_{1,3}$ $b(\alpha) = 1, b(\alpha) = 0 \to \bot$

(G3)$_{1,3}$ $b(\alpha) = 1 \to E_1(\alpha)$

(G4)$_{1,3}$ $b(\alpha) = 0 \to E_0(\alpha) \mid E_{\frac{1}{2}}(\alpha)$

La segunda tabla corresponde a la estructura de la matriz en torno a la implicancia; por tanto es idéntica para matrices de tres valores con los mismos elementos designados.

$$\begin{array}{ccc}
E_0(\alpha), E_0(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha\to\beta) \\
E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_0(\alpha\to\beta) \\
E_0(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta)
\end{array}$$

Realizamos reducciones similares a las hechas anteriormente, quedandonos nuevamente con las expresiones:

$$\begin{aligned}
b(\alpha) = 0 &\to E_1(\alpha\to\beta) \\
b(\alpha) = 1, b(\beta) = 0 &\to E_0(\alpha\to\beta) \\
b(\beta) = 1 &\to E_1(\alpha\to\beta)
\end{aligned}$$

Traducimos entonces estas expresiones referentes a la estructura de la implicación a bivaluaciones:

$$\begin{gathered}
b(\alpha) = 0 \to b(\alpha\to\beta) = 1 \\
b(\beta) = 1 \to b(\alpha\to\beta) = 1 \\
b(\alpha) = 1, b(\beta) = 0 \to b(\alpha\to\beta) = 0, b\left(\neg(\alpha\to\beta)\right) = 1
\end{gathered}$$

Por último notamos que (G3)$_{1,3}$ es trivial y (G4)$_{1,3}$ es consecuencia de G1.

Las tablas para $\vee$ y $\wedge$ nos entregan la siguiente información:

$$
\begin{array}{ccc}
E_0(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha \vee \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha \vee \beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \to E_1(\alpha \vee \beta) \\
E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_0(\alpha \vee \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_0(\alpha \vee \beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha \vee \beta) \\
E_0(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha \vee \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha \vee \beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha \vee \beta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccc}
E_0(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha \wedge \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha \wedge \beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha \wedge \beta) \\
E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_0(\alpha \wedge \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_0(\alpha \wedge \beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_0(\alpha \wedge \beta) \\
E_0(\alpha), E_1(\beta) \to E_0(\alpha \wedge \beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \to E_0(\alpha \wedge \beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha \wedge \beta)
\end{array}
$$

Reducimos como antes y obtenemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
b(\alpha) = 0, b(\beta) = 0 &\to b(\alpha \vee \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \vee \beta)\right) = 1 \\
b(\alpha) = 1 &\to b(\alpha \vee \beta) = 1 \\
b(\beta) = 1 &\to b(\alpha \vee \beta) = 1 \\
b(\alpha) = 0 &\to b(\alpha \wedge \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \wedge \beta)\right) = 1 \\
b(\beta) = 0 &\to b(\alpha \wedge \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \wedge \beta)\right) = 1 \\
b(\alpha) = 1, b(\beta) = 1 &\to b(\alpha \wedge \beta) = 1
\end{aligned}
$$

Estas expresiones son idénticas a las obtenidas antes, ya que estamos trabajando bajo el mismo conjunto de elementos designados y usamos las mismas ecuaciones para diferenciar valores.

Los axiomas que definen las bivaluaciones son:

- $\diamond$ G1
- $\diamond$ G2
- $\diamond$ $\mathrm{G}^1_{1,3}$: $b(\alpha) = 0, b(\neg\alpha) = 0 \to b(\neg\neg\alpha) = 1$
- $\diamond$ $\mathrm{G}^2_{1,3}$:

$$
\begin{aligned}
b(\alpha) = 1 \to\ & b(\neg\alpha) = 0, b(\neg\neg\alpha) = 1, \\
& b(\alpha \vee \beta) = 1, \\
& b(\beta \to \alpha) = 1, \\
& b(\beta \vee \alpha) = 1
\end{aligned}
$$

- $\diamond$ $\mathrm{G}^3_{1,3}$:

$$
\begin{aligned}
b(\alpha) = 0 \to\ & b(\alpha \to \beta) = 1, \\
& b(\alpha \wedge \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \wedge \beta)\right) = 1, \\
& b(\beta \wedge \alpha) = 0, b\left(\neg(\beta \wedge \alpha)\right) = 1
\end{aligned}
$$

- $\diamond$ $\mathrm{G}^4_{1,3}: b(\alpha)=1, b(\beta)=0 \to b(\alpha\to\beta)=0, b\left(\neg(\alpha\to\beta)\right)=1$
- $\diamond$ $\mathrm{G}^5_{1,3}: b(\alpha)=0, b(\beta)=0 \to b(\alpha\vee\beta)=0, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right)=1$
- $\diamond$ $\mathrm{G}^6_{1,3}: b(\alpha)=1, b(\beta)=1 \to b(\alpha\wedge\beta)=1$

Sistema Deductivo $\mathcal{S}_{1,3}$

Este sistema deductivo aparece en [Mar99] bajo el nombre I^1 y fue introducido en [SC95]. La única regla de inferencia es Modus Ponens y los axiomas son:

$\mathrm{A}_{1,3}1$ Los axiomas de SLPPL

$\mathrm{A}_{1,3}2$ $(\neg\alpha)^\bullet$

$\mathrm{A}_{1,3}3$ $\alpha^\bullet \to ((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha))$

Demostraremos en primer lugar que se trata de axiomas correctos, es decir, que se tiene $\vDash_{\mathcal{M}_{1,3}} A$ para los axiomas $\mathrm{A}_{1,3}2$ y $\mathrm{A}_{1,3}3$.

$\mathrm{A}_{1,3}2$ Basta con observar que en $\mathcal{M}_{1,3}$ se tiene $\neg\alpha \in \{0,1\}$.

$\mathrm{A}_{1,3}3$ Para que se tenga $v(\alpha^\bullet \to ((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha)))=0$ se debe tener

$$\begin{aligned} v(\alpha^\bullet) &= 1 \\ v\left((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha)\right) &= 0 \end{aligned}$$

El argumento para concluir entonces es idéntico al usado en $\mathrm{A}_{1,1}3$, pues también ocurre en $\mathcal{M}_{1,3}$ que $\left[\frac{1}{2}\right]^\bullet = 0$ y no existe elemento que satisfaga $v(\beta)=1$ y $v(\neg\beta)=1$;

Como los axiomas de SLPPL son correctos, y lo es también la regla de inferencia MP; tenemos que si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{1,3}} \varphi$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{1,3}} \varphi$.

Lema 2.27. *En $\mathcal{S}_{1,3}$ se satisface:*

1. $\neg(\beta^\bullet) \vdash \neg(\neg\beta\wedge\neg\beta)$
2. $\beta, \neg\beta \vdash \gamma$
3. $\neg(\beta^\bullet) \vdash \beta\to\gamma$
4. $\beta, \neg\gamma \vdash \neg(\beta\to\gamma)$
5. $\neg\beta \vdash \neg(\beta\wedge\gamma)$
6. $\neg(\beta^\bullet) \vdash \beta\wedge\gamma$

7. $\beta \vdash \neg\neg\beta$

8. $\neg(\beta^{\bullet}) \vdash \neg\neg\beta$

Demostración. Al igual que en el Lema 2.23, hay algunos resultados que son directos de los axiomas de SLPPL, y que se pueden resolver por valuaciones, sin embargo están aquí resueltos usando los axiomas, en este caso son los puntos 1, 3, 6. Usamos el Axioma $\mathrm{A}_{1,3}2$ en las partes 2, 7 y 8; y el axioma $\mathrm{A}_{1,3}3$ en 2 y en las restantes partes.

1. Usando contraposición tenemos que nos basta con demostrar $(\neg\beta \wedge \neg\beta) \vdash (\beta \vee \neg\beta)$, pero de la lógica SLPPL sabemos $\neg\beta \wedge \neg\beta \vdash \neg\beta$ y $\neg\beta \vdash \beta \vee \neg\beta$; luego terminamos la demostración usando MP.

2. En primer lugar tenemos $\vdash (\neg\beta)^{\bullet}$ por axioma $\mathrm{A}_{1,3}2$; por otro lado de SLPPL sabemos que $\beta \vdash \alpha \to \beta$ por corolario 2.7 y que $\vdash \alpha \to \alpha$ por el Corolario 2.6. Sustituyendo entonces en $\mathrm{A}_{1,3}3$ y en las expresiones anteriores α por $\neg\beta$ tenemos:

$$\begin{aligned} \beta &\vdash \alpha \to \beta \\ &\vdash \neg\beta \to \neg\beta \\ &\vdash (\neg\beta)^{\bullet} \to ((\neg\beta \to \beta) \to ((\neg\beta \to \neg\beta) \to \neg\neg\beta)) \end{aligned}$$

   Usamos MP para finalizar la demostración.

3. Para demostrar que $\neg\beta^{\bullet} \vdash \beta \to \gamma$ basta con observar dos resultados sencillos de SLPPL, en primer lugar, que $\neg(\beta \wedge \neg\beta) \vdash \neg(\beta \vee \beta)$ y en segundo lugar, que $\neg(\beta \vee \beta) \vdash \beta \to \gamma$. Usando ambos resultados y MP obtenemos lo buscado.

4. La demostración es idéntica a la de 2.23,4 usando que el axioma $\mathrm{A}_{1,1}3$ es igual al axioma $\mathrm{A}_{1,3}3$

5. La demostración es idéntica a la de 2.23,6 usando que el axioma $\mathrm{A}_{1,1}3$ es igual al axioma $\mathrm{A}_{1,3}3$.

6. Usando contraposición tenemos que nos basta con demostrar $(\beta \wedge \gamma) \vdash (\beta \vee \neg\beta)$, pero de la lógica SLPPL sabemos $\beta \wedge \beta \vdash \beta$ y $\beta \vdash \beta \vee \neg\beta$; luego terminamos la demostración usando MP.

7. En primer lugar usamos el axioma $\mathrm{A}_{1,3}2$ y obtenemos $\vdash (\neg\beta \wedge \neg\neg\beta)$. Del Lema 2.27,2 y deducción tenemos $\beta \vdash \neg\beta \to \neg\neg\beta$; además sabemos de SLPPL $\alpha \to \delta, \alpha \vee \delta \to \alpha \vdash \alpha$ (de hecho es tautología clásica sin negación). Luego, reemplazando en la expresión anterior α por $\neg\beta$ y δ por $\neg\neg\beta$ y usando MP obtenemos

$$\beta \vdash \neg\neg\beta$$

8. En primer lugar, tal como en el punto anterior, usamos el axioma $\mathrm{A}_{1,3}2$ para obtener $\vdash (\neg\beta \wedge \neg\neg\beta)$. Por otro lado, sabemos que en SLPPL se tiene $\neg\delta \vee \gamma \vdash \neg(\neg\gamma \vee \neg\gamma)$ y que $\neg(\neg\gamma \vee \neg\gamma), \neg\gamma \vee \epsilon \vdash \epsilon$; reemplazando en estas expresiones γ por β, δ por β y ϵ por $\neg\neg\beta$, obtenemos lo buscado usando MP. $\square$

A continuación demostraremos que el sistema es completo utilizando nuevamente el método de Kalmár.

Lema 2.28. *Sea α una fórmula cuyas variables proposicionales están en el conjunto $\{p_1 \dots p_n\}$. Para una valuación (algebráica) v se define:*

$$\alpha' = \begin{cases} \alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \neg\neg\alpha, & \textit{si } v(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \neg\alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases} \qquad \overline{\alpha} = \begin{cases} \alpha^\bullet, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \neg\left(\alpha^\bullet\right), & \textit{si } v(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \alpha^\bullet, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Entonces $\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash_{S_{1,3}} \alpha'$

Demostración. Demostramos el Lema por inducción sobre el tamaño de la fórmula.

- ◇ Si $\alpha = p$, se tiene $\alpha' = p'$, luego, como $p' \vdash_{S_{1,3}} p'$ se satisface el Lema

- ◇ Si $\alpha = \neg\beta$, entonces α y β comparten las variables proposicionales; tendremos distintos casos entonces dependiendo del valor de la valuación en β.

  - Si $\beta^v = 1$, entonces $\alpha^v = 0$, por tanto $\beta' = \beta$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg\neg\beta$. Luego por hipótesis de inducción se tiene

  $$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash_{S_{1,3}} \beta$$

  y por axioma $A_{1,3}2$ se tiene

  $$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash_{S_{1,3}} \alpha'$$

  - Si $\beta^v = 0$, entonces $\alpha^v = 1$, por tanto $\beta' = \neg\beta = \alpha = \alpha'$. Por hipótesis de inducción se tiene lo buscado

  $$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash_{S_{1,3}} \alpha'$$

  - Si $\beta^v = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha^v = 0$, por tanto $\beta' = \neg\neg\beta$ y $\alpha' = \neg\left(\alpha \wedge \alpha\right)$. Además, dada la definición de las operaciones en la matriz, se tiene que $\beta = p$ y $\alpha = \neg p$. Así tenemos $p' = \neg\neg p$ y $\overline{p} = \neg p^\bullet$ y por lemma 2.27,1 se tiene $\overline{p} \vdash \alpha'$.

- ◇ Si $\alpha = \beta \to \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

  - Si $\beta^v = 0$ se tiene $\alpha^v = 1$, y por tanto $\alpha' = \alpha = \beta \to \gamma$ y $\beta' = \neg\beta$ por el Lema 2.27,2 obtenemos:

  $$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n', \beta \vdash \gamma$$

  y por el Teorema de Deducción

  $$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \alpha$$

- Si $\beta^v = \frac{1}{2}$ entonces $\beta = p$, en ese caso tenemos que $\overline{p} = \neg p^\bullet$ y por Lema 2.27,3 tenemos lo buscado.
- Si $\gamma^v = 1$ se tiene que $\alpha^v = 1$, y por tanto $\alpha' = \alpha = \beta \rightarrow \gamma$ y $\gamma' = \gamma$, por hipótesis de inducción $\overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \gamma$ y finalmente, por el coroloario 2.7 se tiene lo buscado.
- Si $\beta^v = 1$ y $\gamma = 0$ entonces $\alpha^v = 0$, y por tanto $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \rightarrow \gamma)$, $\beta' = \beta$ y $\gamma' = \neg\gamma$; luego por hipótesis de inducción tenemos

  $$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n, \beta \vdash \beta$$
  $$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n, \beta \vdash \gamma'$$

  y por Lema 2.27,4.
- Si $\beta^v = 1$ y $\gamma = \frac{1}{2}$ entonces $\alpha^v = 0$ y $\gamma = p$, y por tanto $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \rightarrow \gamma)$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \neg\neg\gamma$ y $\overline{\gamma} = \neg p^\bullet$. Queremos demostrar que $\beta, \neg p^\bullet \vdash \neg(\beta \rightarrow p)$; por contraposición y deducción bastará demostrar $\beta, \beta \rightarrow p \vdash p^\bullet$; pero es evidente que $\beta, \beta \rightarrow p \vdash p$ y que $p \vdash p^\bullet$, luego por modus ponens obtenemos lo buscado.

◇ Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v = 0$, entonces $\alpha^v = 0$ y se tiene $\beta' = \neg\beta$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \wedge \gamma)$. Concluimos directamente usando en Lema 2.27,5.
- Si $\gamma^v = 0$, se procede similar al caso anterior, usando la equivalencia en SLPPL entre $\neg(\beta \wedge \gamma)$ y $\gamma \rightarrow \neg(\beta \wedge \beta)$.
- Si $\beta^v = \frac{1}{2}$ o $\gamma^v = \frac{1}{2}$ se tiene respectivamente $\beta = p_i$ o $\gamma = p_j$, de este modo, tenemos $\overline{p_i} = \neg p_i^\bullet$ o $\overline{p_j} = \neg p_i^\bullet$; además en cualquiera de los dos casos se tiene $\alpha^v = 0$ y por tanto $\alpha' = \neg\alpha$; usando 2.27,6 o la modificacion del mismo Lema usando la simetría de $(\beta \wedge \gamma)$, concluímos lo buscado:

  $$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$$
- Si $\beta^v = 1 = \gamma^v$, entonces $\alpha^v = 1$, y por tanto $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ y $\alpha' = \alpha = \beta \wedge \gamma$; luego por el corolario 2.9 se tiene lo buscado.

◇ Si $\alpha = \beta \vee \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v = 1$ o $\gamma^v = 1$ se tiene $\alpha^v = 1$; además respectivamente se tiene $\beta' = \beta$ o $\gamma' = \gamma$; por tanto, notando que $\alpha' = \alpha$ basta con usar la hipótesis de inducción, respectivamente,

  $$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n, \beta \vdash \beta \text{ o}$$
  $$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n, \beta \vdash_{S_{1,1}} \gamma$$

  pues luego usamos los axiomas 6 o 7 de SLPPL para concluir lo buscado.

- Si $\beta^v = \frac{1}{2}$ y $\gamma^v = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha^v = 0$, y por tanto $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \vee \gamma)$, $\beta = p_i$ y $\gamma = p_j$; tenemos entonces $\overline{p_i} = \neg p_i^\bullet$ y $\overline{p_j} = \neg p_j^\bullet$ luego usando que en SLPPL se tiene $\neg(\gamma \wedge \gamma), \neg(\beta \wedge \beta) \vdash \neg(()\gamma \vee \beta)$, basta con usar que $\neg\delta^\bullet \vdash \neg(\delta \wedge \delta)$ y modus ponens para demostrar

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \neg\alpha$$

- Si $\beta^v = 0$ y $\gamma^v = \frac{1}{2}$, entonces $\alpha^v = 0$ y se tiene $\beta' = \neg\beta$, $\gamma = p$, $\overline{p} = \neg(p^\bullet)$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \vee \gamma)$. Del Lema 2.27,5 obtenemos $\neg\beta \vdash \neg\beta \wedge \beta$; por otro lado en SLPPL $\neg(p^\bullet) \vdash \neg(p \wedge p)$, es decir, de $\overline{p}$ obtenemos $\neg(p \wedge p)$; finalmente, en SLPPL se satisface $\neg\beta \wedge \beta, \neg\gamma \wedge \gamma \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$ y concluímos por MP.
- Si $\beta^v = \frac{1}{2}$ y $\gamma^v = 0$, se procede similar a al caso anterior, usando la modificación natural del Lema 2.27,5, usando que son equivalentes (y equidemostrables) en SLPPL las fórmulas $\neg(\beta \vee \gamma)$ y $\neg(\gamma \vee \beta)$. □

Lema 2.29. *Sea α una $\mathcal{M}_{1,3}$-tautología; entonces se tiene $\vdash_{\mathcal{S}_{1,3}} \alpha$.*

Demostración. Al igual que en el Teorema correspondiente a $\mathcal{S}_{1,1}$, al ser α una tautología, para cualquier valuación (algebráica) v se tiene $v(\alpha) = 1$, lo que implica que sin depender de la valuación escogida para la definición, $\alpha' = \alpha$. Sean $p_1, \ldots, p_n$ las variables proposicionales que aparecen en α. Supongamos que para algún $m \leq n$ se tiene que toda valuación $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, p_1', \ldots, p_m' \vdash_{S_{1,3}} \alpha$, donde $\overline{\beta}$ y β' se definen por la valuación. Escogemos tres valuaciones v_1, v_2, v_3 que coinciden en $\langle p_1, \ldots, p_{m-1} \rangle$ y tales que $v_1(p_m) = 1$, $v_2(p_m) = \frac{1}{2}$ y $v_3(p_m) = 0$. Usando la hipótesis se tiene que:

$$\Sigma, p_m^\bullet, p_m \vdash \alpha \tag{2.33}$$
$$\Sigma, \neg(p_m^\bullet), \neg\neg p_m \vdash \alpha \tag{2.34}$$
$$\Sigma, p_m^\bullet, \neg p_m \vdash \alpha \tag{2.35}$$

Donde, como antes, $\Sigma = \left\langle \overline{p_1}, \ldots, \overline{p_{m-1}}, p_1', \ldots, p_{m-1}' \right\rangle$, definido por cualquiera de las tres valuaciones. De (2.33) y (2.35) obtenemos por el Teorema 2.5 respectivamente

$$\Sigma, p_m^\bullet \vdash p_m \to \alpha$$
$$\Sigma, p_m^\bullet \vdash \neg p_m \to \alpha$$

Argumentando de manera idéntica al teorema 2.25 obtenemos

$$\Sigma \vdash p_m^\bullet \alpha \tag{2.36}$$

Por otro lado, en (2.25) podemos eliminar $\neg(p_m \wedge p_m)$, usando el Lema 2.27,8; obteniendo por el Teorema de deducción 2.5

$$\Sigma \vdash \neg p_m^\bullet \alpha \tag{2.37}$$

Finalmente, sabemos que $\vdash (p_m^\bullet)^\bullet$, luego usando nuevamente el Axioma A8 de SLPPL y MP con (2.36) y (2.37) resulta

$$\Sigma \vdash \alpha \tag{2.38}$$

Los valores sobre $\langle p_1, \ldots, p_{m-1}\rangle$ de las valuaciones son arbitrarios (aunque comunes a v_1,v_2 y v_3), luego sin importar la valuación usada para la definición de $\overline{\beta}$ y β' se satisface (2.38). Aplicando el Lema 2.28 se tiene el caso base de $n = m$, luego usando lo demostrado podemos eliminar de la hipótesis una a una las n variables proposicionales que aparecen en α; llegando a

$$\vdash \alpha$$

□

Teorema 2.30. *Completud para $S_{1,3}$: Si para toda $\mathcal{M}_{1,3}$-tautología se tiene $\vdash_{\mathcal{S}_{1,3}} \alpha$; luego si $\Sigma \vDash_{\mathcal{M}_{1,3}} \alpha$ entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}_{1,3}} \alpha$. La demostración es idéntica a la del Teorema 2.26*

2.3.1.3. $\mathcal{M}_{2,1} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \mathcal{D}_2, \sim_1 \right\rangle$

Las tablas de operaciones para este sistema son las siguientes:

	0	$\frac{1}{2}$	1
$\sim$	1	$\frac{1}{2}$	0

$\rightarrow$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	1

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	1

<u>Semántica Bivaluada</u>

En primer lugar necesitamos fórmulas que separen los valores en la matriz:

$$\begin{aligned} x = 0 &\text{ si y solo si } t(x) = 0 \\ x = \frac{1}{2} &\text{ si y solo si } t(x) = 1, t(\sim x) = 1 \\ x = 1 &\text{ si y solo si } t(x) = 1, t(\sim x) = 0 \end{aligned}$$

La primera tabla entrega las siguientes ecuaciones en $\mathcal{M}_{2,1}$:

$$\begin{gathered} E_0(\alpha) \rightarrow E_1(\sim \alpha) \\ E_{\frac{1}{2}}(\alpha) \rightarrow E_{\frac{1}{2}}(\sim \alpha) \\ E_1(\alpha) \rightarrow E_0(\sim \alpha) \end{gathered}$$

Lo que nos entrega los siguientes axiomas para la semántica gentzeniana:

$$b(\alpha) = 0 \to b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 0 \tag{2.39}$$
$$b(\alpha) = 1, b(\neg\alpha) = 1 \to b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 1 \tag{2.40}$$
$$b(\alpha) = 1, b(\neg\alpha) = 0 \to b(\neg\alpha) = 0 \tag{2.41}$$

Nuestra primera observación es que la fórmula (2.41) no entrega información; así, nos podemos quedar solo con las fórmulas (2.39) y (2.40).

Para la implicación tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{array}{ccc}
E_0(\alpha), E_0(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha\to\beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha\to\beta) \\
E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) \\
E_0(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\to\beta)
\end{array}$$

Esto nos entrega nueve fórmulas que serán axiomas de la semántica gentzeniana asociada; no las escribiremos de manera explícita de inmediato, porque haremos antes las reducciones. Obtenemos así:

$$\begin{aligned}
E_0(\alpha) &\to E_1(\alpha\to\beta) \\
E_{\frac{1}{2}}(\beta) &\to E_1(\alpha\to\beta) \\
E_1(\beta) &\to E_1(\alpha\to\beta) \\
E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) &\to E_0(\alpha\to\beta) \\
E_0(\alpha), E_1(\beta) &\to E_0(\alpha\to\beta)
\end{aligned}$$

Escribiremos las instancias de G3 y G4 para esta matriz.

$(\mathrm{G1})_{2,1}$ $\top \to b(\alpha) = 1 \mid b(\alpha) = 0$

$(\mathrm{G2})_{2,1}$ $b(\alpha) = 1, b(\alpha) = 0 \to \bot$

$(\mathrm{G3})_{2,1}$ $b(\alpha) = 1 \to E_1(\alpha) \mid E_{\frac{1}{2}}(\alpha)$

$(\mathrm{G4})_{2,1}$ $b(\alpha) = 0 \to E_0(\alpha)$

Reduciendo entonces las expresiones anteriores relativas a la implicación, usando estos axiomas, obtenemos:

$$\begin{aligned}
b(\alpha) = 0 &\to b(\alpha\to\beta) = 1, b(\neg(\alpha\to\beta)) = 0 \\
b(\beta) = 1 &\to b(\alpha\to\beta) = 1, b(\neg(\alpha\to\beta)) = 0 \\
b(\alpha) = 1, b(\beta) = 0 &\to b(\alpha\to\beta) = 0
\end{aligned}$$

Por último notamos que $(\mathrm{G4})_{2,1}$ es trivial y $(\mathrm{G3})_{2,1}$ es consecuencia de G1.

Las tablas para $\vee$ y $\wedge$ nos entregan la siguiente información:

$$
\begin{array}{lll}
E_0(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha\vee\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \to E_1(\alpha\vee\beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \to E_1(\alpha\vee\beta) \\
E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\vee\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\vee\beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\vee\beta) \\
E_0(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\vee\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\vee\beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\vee\beta)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
E_0(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha\wedge\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha\wedge\beta) & E_1(\alpha), E_0(\beta) \to E_0(\alpha\wedge\beta) \\
E_0(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_0(\alpha\wedge\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\wedge\beta) & E_1(\alpha), E_{\frac{1}{2}}(\beta) \to E_1(\alpha\wedge\beta) \\
E_0(\alpha), E_1(\beta) \to E_0(\alpha\wedge\beta) & E_{\frac{1}{2}}(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\wedge\beta) & E_1(\alpha), E_1(\beta) \to E_1(\alpha\wedge\beta)
\end{array}
$$

Reducimos como antes y obtenemos las siguientes expresiones:

$$
\begin{aligned}
b(\alpha) = 0, b(\beta) = 0 &\to b(\alpha\vee\beta) = 0 \\
b(\alpha) = 1 &\to b(\alpha\vee\beta) = 1, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right) = 0 \\
b(\beta) = 1 &\to b(\alpha\vee\beta) = 1, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right) = 0 \\
b(\alpha) = 0 &\to b(\alpha\wedge\beta) = 0 \\
b(\beta) = 0 &\to b(\alpha\wedge\beta) = 0 \\
b(\alpha) = 1, b(\beta) = 1 &\to b(\alpha\wedge\beta) = 1, , b\left(\neg(\alpha\wedge\beta)\right) = 0
\end{aligned}
$$

Los axiomas que definen las bivaluaciones son:

- ◇ G1
- ◇ G2
- ◇ $\mathrm{G}^1_{2,1}$:

$$
\begin{aligned}
b(\alpha) = 0 \to\, & b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 0, \\
& b(\alpha\to\beta) = 1, b(\neg(\alpha\to\beta)) = 0, \\
& b(\alpha\wedge\beta) = 0, \\
& b(\beta\wedge\alpha) = 0
\end{aligned}
$$

- ◇ $\mathrm{G}^2_{2,1}$: $b(\alpha) = 1, b(\neg\alpha) = 1 \to b(\neg\neg\alpha = 1)$
- ◇ $\mathrm{G}^3_{2,1}$:

$$
\begin{aligned}
b(\beta) = 1 \to\, & b(\alpha\to\beta) = 1, b(\neg(\alpha\to\beta)) = 0, \\
& b(\alpha\vee\beta) = 1, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right) = 0, \\
& b(\beta\vee\alpha) = 1, b\left(\neg(\beta\vee\alpha)\right) = 0
\end{aligned}
$$

- ◇ $\mathrm{G}^4_{2,1}$: $b(\alpha) = 1, b(\beta) = 0 \to b(\alpha\to\beta) = 0$

- $\diamond$ $\mathrm{G}^5_{2,1}$: $b(\alpha) = 0, b(\beta) = 0 \to b(\alpha\vee\beta) = 0$
- $\diamond$ $\mathrm{G}^6_{2,1}$: $b(\alpha) = 1, b(\beta) = 1 \to b(\alpha\wedge\beta) = 1, b\left(\neg(\alpha\wedge\beta)\right) = 0$

Sistema Deductivo $\mathcal{S}_{2,1}$

Éste sistema aparece en [Car+01] y [Mar99] bajo el nombre P^1_2. Una axiomatización y la demostración de su completud usando el método de Kalmár aparece en [Mar05]demostración la única regla de inferencia es Modus Ponens y los axiomas son:

$\mathrm{A}_{2,1}1$ Los axiomas de SLPPL

$\mathrm{A}_{2,1}2$ $\alpha\leftrightarrow\neg\neg\alpha$

$\mathrm{A}_{2,1}3$ $\beta^\circ\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha))$

Demostraremos en primer lugar que se trata de axiomas correctos, es decir, que se tiene $\vDash_{\mathcal{M}_{2,1}} A$ para los axiomas $\mathrm{A}_{2,1}2$ y $\mathrm{A}_{2,1}3$.

$\mathrm{A}_{2,1}2$ Idéntico a $\mathrm{A}_{1,1}2$

$\mathrm{A}_{2,1}3$ Para que se tenga $v(\beta^\circ\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha))) = 0$ se debe tener

$$v(\beta^\circ) = 1$$
$$v\left((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha)\right) = 0$$

Pero como $[\frac{1}{2}]^\circ = 0$, tenemos de la primera ecuación que $v(\beta) = 1$ o $v(\beta) = 0$; por otro lado, de la segunda ecuación tenemos $v\left(\alpha\to\beta\right) = 1$ y $v\left((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha\right) = 0$; de esto podemos deducir $v\left(\alpha\to\beta\right) = 1$; $v\left(\alpha\to\neg\beta\right) = 1$ y $v\left(\alpha\right) = 1$; luego necesitamos que $v(\beta) \in F$, $v(\neg\beta) \in F$; y $v(\beta) = 1$ o $v(\beta) = 0$. Como dicha valuación no existe, toda valuación v (algebráica) satisface

$$v(\beta^\circ\to((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha))) = 1$$

Como los axiomas de SLPPL son correctos, y lo es también la regla de inferencia MP; tenemos que si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{2,1}} \varphi$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{2,1}} \varphi$

Lema 2.31. *En $\mathcal{S}_{2,1}$ se satisface:*

1. $(\beta\wedge\neg\beta) \vdash \left(\neg^k\beta \vee \neg^{k+1}\beta\right)$
2. $\neg\beta, \beta^\circ \vdash \neg(\beta\wedge\beta)$
3. $\neg\beta, \beta^\circ \vdash \beta\to\gamma$
4. $\beta, \gamma^\circ, \neg\gamma \vdash \neg\left(\beta\to\gamma\right)$

5. $\neg(\alpha\wedge\alpha)\vdash\neg\alpha$

6. $\vdash\alpha\vee\neg\alpha$

7. $\beta\rightarrow\alpha,\neg\beta\rightarrow\alpha\vdash\alpha$

Demostración. Como se hará evidente en el siguiente lema, las demostraciones para el caso en que el conjunto de elementos no designados es únicamente el 0 serán mucho más sencillas. Utilizamos el axioma $\mathrm{A}_{2,1}2$ en 1, $\mathrm{A}_{2,1}3$ en 5, 6 y 7

1. Casi idéntico a 2.23,1, usando que $\mathrm{A}_{2,1}2$ es igual a $\mathrm{A}_{1,1}2$.

2. Sabemos que $\delta,\neg(\delta\wedge\gamma)\vdash\neg(\gamma\wedge\gamma)$, pues es una consecuencia inmediata del Lema de Contraposición 2.11 y el Corolario 2.9. Basta entonces con aplicar este resultado a $\delta=\neg\beta$ y $\gamma=\beta$

3. Usamos el resultado anterior usando que en SLPPL se tiene $\neg(\beta\wedge\beta)\vdash\beta\rightarrow\gamma$, por el teorema de deducción y el hecho de que $\{\neg(\beta\wedge\beta),\beta\}$ es trivial.

4. Por 2.312 tenemos que $\gamma^\circ,\neg\gamma\vdash\neg\gamma\wedge\gamma$, además sabemos de SLPPL que $\neg(\gamma\wedge\gamma),\beta\vdash\neg(\beta\rightarrow\gamma)$, nuevamente como consecuencia del Lema 2.11 y el Corolario 2.9. Obtenemos lo buscado por MP.

5. Reemplazamos en $\mathrm{A}_{2,1}3$ β por $\neg(\alpha\wedge\alpha)$, usamos ademas que como $\neg(\alpha\wedge\alpha)$ es compleja, se tiene $\vdash\neg(\alpha\wedge\alpha)^\circ$ y obtenemos

   $$\vdash\alpha\rightarrow\neg\alpha\wedge\alpha\rightarrow((\alpha\rightarrow\neg\neg(\alpha\wedge\alpha))\rightarrow\neg\alpha)$$

   por otro lado, por el Corolario 2.7 tenemos que $\neg(\alpha\wedge\alpha)\vdash\alpha\rightarrow\neg(\alpha\wedge\alpha)$ y además sabemos que $\alpha\rightarrow\neg\neg(\alpha\wedge\alpha)$; usando MP con estas expresiones obtenemos $\neg(\alpha\wedge\alpha)\vdash\neg\alpha$

6. Para demostrar $\vdash\alpha\vee\neg\alpha$ reemplazamos en $\mathrm{A}_{2,1}3$ β por una tautología de SLPPL como $p\rightarrow p$. Obtenemos así, usando MP,

   $$\vdash(\alpha\rightarrow\neg(p\rightarrow p))\rightarrow\neg\alpha$$

   Por otro lado, en SLPPL $(\alpha\rightarrow\neg(p\rightarrow p))\rightarrow\neg\alpha$ es equivalente (y equidemostrable) con $\neg(\alpha\rightarrow\neg(p\rightarrow p))\vee\neg\alpha$ y además $\neg(\alpha\rightarrow\neg(p\rightarrow p))\vdash\alpha$. Tenemos entonces una expresión de la forma $\vdash\delta\vee\alpha$, donde sabemos además que $\vdash\delta\rightarrow\neg\alpha$; obtenemos entonces usando el Corolario 2.19 lo buscado, es decir, $\vdash\alpha\vee\neg\alpha$

7. Basta con usar MP con el resultado anterior (i.e. 2.31,6) y el axioma A8 de SLPPL. □

Lema 2.32. *Sea α una fórmula cuyas variables proposicionales están en el conjunto $\{p_1 \ldots p_n\}$. Para una valuación (algebráica) v se define:*

$$\alpha' = \begin{cases} \alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \alpha, & \textit{si } v(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \neg\alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases} \qquad \overline{\alpha} = \begin{cases} \alpha^\circ, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \neg\left(\alpha^\circ\right), & \textit{si } v(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \alpha^\circ, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Entonces $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{2,1}} \alpha'$

Demostración.

◇ Si $\alpha = p$, se tiene $\alpha' = p'$, luego, como $p' \vdash p'$ se satisface el Lema

◇ Si $\alpha = \neg\beta$, entonces α y β comparten las variables proposicionales; son distintos casos dependiendo del valor de la valuación en β.

- Si $\beta^v = 1$, entonces $\alpha^v = 0$, por tanto $\beta' = \beta$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg\neg\beta$. Luego por $A_{2,1}3$ y MP se tiene
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \alpha'$$
- Si $\beta^v = \frac{1}{2}$, entonces $\beta = \neg^k p$, por tanto $\beta' = \beta$ y $\alpha = \alpha' = \neg^{k+1}p$, $\overline{p} = p \wedge \neg p$. Luego por Lema 2.31,1 se tiene para cualquier k:
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \left(\neg^k p \vee \neg^{k+1} p\right)$$
Por otro lado, $\left(\neg^k p \vee \neg^{k+1} p\right) \vdash \neg^{k+1}p$, obteniendo por MP lo buscado.
- Si $\beta^v = 0$, entonces $\alpha^v = 1$, por tanto $\beta' = \neg\beta = \alpha = \alpha'$. Es inmediato entonces por ser la hipótesis de inducción.
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \alpha'$$

◇ Si $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v = 0$ se tiene $\alpha^v = 1$, y por tanto $\alpha' = \alpha = \beta \rightarrow \gamma$ y $\beta' = \neg\beta$; por hipótesis de inducción entonces se tiene $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \neg\beta'$. Por otro lado, sabemos que si β es compleja se tiene $\vdash \beta^\circ$ y si $\beta = \neg^k p$, $v(p) \in \langle 0, 1 \rangle$ y $\overline{p} = p^\circ$ tenemos por Lema 2.31,1 que $\overline{p} \vdash \beta^\circ$; Para cualquiera de los dos casos usamos el Lema 2.31,3 para concluir que
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash_{S_{2,1}} \alpha' \tag{2.42}$$
- Si $\gamma^v = 1$ se tiene que $\alpha^v = 1$, y por tanto $\alpha' = \alpha = \beta \rightarrow \gamma$ y $\gamma' = \gamma$, por hipótesis de inducción $\overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \gamma$ y finalmente, por el Coroloario 2.7 se tiene lo buscado.

- Si $\beta^v \in \mathcal{D}_2$ y $\gamma^v = 0$ entonces $\alpha^v = 0$, y por tanto $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta\to\gamma)$, $\beta' = \beta$ y $\gamma' = \neg\gamma$; usando un argumento similar al del primer caso tenemos $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \gamma^\circ$; luego usamos el Lema 2.31,4 y concluimos lo buscado por MP.

◇ Si $\alpha = \beta\vee\gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v = \gamma^v = 0$, entonces $\alpha^v = 0$ y se tiene $\beta' = \neg\beta$, $\gamma' = \neg\gamma$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta\vee\gamma)$. tenemos por hipótesis entonces

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\beta$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\gamma$$

Del mismo modo argumentado en el punto anterior tenemos

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \beta^\circ$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \gamma^\circ$$

y por Lema 2.31,2 obtenemos:

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\beta\wedge\beta$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\gamma\wedge\gamma$$

Finalmente usamos el resultado conocido de SLPPL: $\neg\beta\wedge\beta, \neg\gamma\wedge\gamma \vdash \neg(\beta\vee\gamma)$ y concluimos por MP.

- Si $\beta^v \in \mathcal{D}_2$ o $\beta^v \in \mathcal{D}_2$ se tiene respectivamente $\beta' = \beta$ o $\gamma' = \gamma$, en cualquiera de los dos casos se tiene $\alpha^v = 1$ y por tanto $\alpha' = \alpha$ y por el axioma A6 o A7 de SLPPL tenemos lo buscado.

◇ Si $\alpha = \beta\wedge\gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v = 0$ o $\gamma^v = 0$ se tiene $\alpha^v = 0$; además respectivamente se tiene $\beta' = \neg\beta$ o $\gamma' = \neg\gamma$; veremos el caso $\beta' = \neg\beta$, pues el otro es simétrico; tenemos por el lema 2.31,3, usando (2.42), que $\neg\beta, \beta^\circ \vdash \beta\to\neg(\gamma\wedge\gamma)$ Usamos luego, como observamos en $S_{1,1}$, que $\beta\to\neg(\gamma\wedge\gamma)$ es equivalente con $\neg(\beta\wedge\gamma)$ en SLPPL, concluyendo finalmente por MP. Para el caso $\gamma^v = 0$ en esta última observacion usamos que que $\gamma\to\neg(\beta\wedge\beta)$ es equivalente con $\neg(\beta\wedge\gamma)$.
- Si $\beta^v \in \mathcal{D}_2$ y $\gamma^v \in \mathcal{D}_2$, entonces $\alpha^v = 1$, y por tanto $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ y $\alpha' = \alpha$; concluímos directamente por el Corolario 2.9. □

Lema 2.33. *Sea α una $\mathcal{M}_{2,1}$-tautología; entonces se tiene $\vdash_{\mathcal{S}_{2,1}} \alpha$.*

Demostración. Como α es una tautología, $\alpha' = \alpha$. Sean $p_1, \ldots, p_n$ las variables proposicionales que aparecen en α. Supongamos que para algún $m \leq n$ se tiene que toda valuación $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, p'_1, \ldots, p'_m \vdash_{S_{2,1}} \alpha$, donde $\overline{\beta}$ y β' se definen por la valuación. Escogemos tres valuaciones v_1, v_2, v_3 que coinciden en $\langle p_1, \ldots, p_{m-1}\rangle$ y tales que $v_1(p_m) = 1$, $v_2(p_m) = \frac{1}{2}$ y $v_3(p_m) = 0$. Usando la hipótesis se tiene que:

$$\Sigma, p_m^\circ, p_m \vdash \alpha \tag{2.43}$$

$$\Sigma, p_m \wedge \neg p_m, p_m \vdash \alpha \tag{2.44}$$

$$\Sigma, p_m^\circ, \neg p_m \vdash \alpha \tag{2.45}$$

Donde $\Sigma = \left\langle \overline{p_1}, \ldots, \overline{p_{m-1}}, p'_1, \ldots, p'_{m-1} \right\rangle$, definido por cualquiera de las tres valuaciones. En (2.44) podemos eliminar p_m y por Teorema de deducción obtenemos

$$\Sigma \vdash (p_m \wedge \neg p_m) \rightarrow \alpha \tag{2.46}$$

De (2.43) y (2.45) obtenemos por el Teorema 2.5 respectivamente

$$\Sigma, p_m^\circ \vdash p_m \rightarrow \alpha$$
$$\Sigma, p_m^\circ \vdash \neg p_m \rightarrow \alpha$$

Luego, usando el Lema 2.31,7 tenemos

$$\Sigma, p_m^\circ \vdash \alpha$$

y por Teorema de duducción

$$\Sigma \vdash p_m^\circ \rightarrow \alpha \tag{2.47}$$

Por otro lado, por el Lema 2.31,6 tenemos

$$\Sigma \vdash (p_m \wedge \neg p_m) \vee p_m^\circ$$

Finalmente, usando el axioma A8 de SLPPL y MP con (2.46) y (2.47) resulta

$$\Sigma \vdash \alpha \tag{2.48}$$

Observamos además que los valores sobre $\langle p_1, \ldots, p_{m-1}\rangle$ de las valuaciones son arbitrarios (aunque comunes a v_1,v_2 y v_3), luego sin importar la valuación usada para la definición de $\overline{\beta}$ y β' se satisface (2.48). Aplicando el Lema 2.32 se tiene el caso base de $n = m$, luego aplicando lo demostrado podemos eliminar de la hipótesis una a una las n variables proposicionales que aparecen en α; llegando a

$$\vdash \alpha$$ □

Teorema 2.34. *Completud para $S_{2,1}$: Si $\Sigma \vDash_{\mathcal{M}_{2,1}} \alpha$; entonces se tiene $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}_{2,1}} \alpha$.*

2.3.1.4. $\mathcal{M}_{2,2} = \left\langle \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}, \mathcal{D}_2, \sim_2 \right\rangle$

Las tablas de operaciones para este sistema son las siguientes:

	0	$\frac{1}{2}$	1
$\sim$	1	1	0

$\to$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	1	1	1
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	1

$\vee$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	1	1
$\frac{1}{2}$	1	1	1
1	1	1	1

$\wedge$	0	$\frac{1}{2}$	1
0	0	0	0
$\frac{1}{2}$	0	1	1
1	0	1	1

<u>Semántica Bivaluada</u>

En primer lugar necesitamos fórmulas que separen los valores en la matriz:

$$
\begin{aligned}
x = 0 &\ \text{ si y solo si } \ t(x) = 0 \\
x = \frac{1}{2} &\ \text{ si y solo si } \ t(x) = 1, t(\sim x) = 1 \\
x = 1 &\ \text{ si y solo si } \ t(x) = 1, t(\sim x) = 0
\end{aligned}
$$

escribimos las instancias de los axiomas

(G1)$_{2,2}$ $\top \to b(\alpha) = 1 \mid b(\alpha) = 0$

(G2)$_{2,2}$ $b(\alpha) = 1, b(\alpha) = 0 \to \bot$

(G3)$_{2,2}$ $b(\alpha) = 1 \to E_1(\alpha) \mid E_{\frac{1}{2}}(\alpha)$

(G4)$_{2,2}$ $b(\alpha) = 0 \to E_0(\alpha)$

Al igual que antes, 3 y 4 son triviales.
La primera tabla entrega las siguientes ecuaciones en $\mathcal{M}_{2,1}$:

$$
\begin{gathered}
E_0(\alpha) \to E_1(\sim \alpha) \\
E_{\frac{1}{2}}(\alpha) \to E_1(\sim \alpha) \\
E_1(\alpha) \to E_0(\sim \alpha)
\end{gathered}
$$

Lo que nos entrega los siguientes axiomas para la semántica gentzeniana, casi los mismos que aquellos para $\mathcal{S}_{2,1}$, dado que las fórmulas que usamos para separar valores son identicas para ambos sistemas:

$$b(\alpha) = 0 \to b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 0 \tag{2.49}$$
$$b(\alpha) = 1, b(\neg\alpha) = 1 \to b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 0 \tag{2.50}$$
$$b(\alpha) = 1, b(\neg\alpha) = 0 \to b(\neg\alpha) = 0 \tag{2.51}$$

Notamos, igual que antes, que 2.51 es trivial, así nos quedamos con las otras dos fórmulas:

$$b(\alpha) = 0 \to b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 0$$
$$b(\alpha) = 1, b(\neg\alpha) = 1 \to b(\neg\neg\alpha) = 0$$

Para la implicación tenemos las mismas ecuaciones que en $\mathcal{S}_{2,1}$, reducimos de igual modo y obtenemos:

$$b(\alpha) = 0 \to b(\alpha\to\beta) = 1, b(\neg(\alpha\to\beta)) = 0$$
$$b(\beta) = 1 \to b(\alpha\to\beta) = 1, b(\neg(\alpha\to\beta)) = 0$$
$$b(\alpha) = 1, b(\beta) = 0 \to b(\alpha\to\beta) = 0$$

Las tablas para $\vee$ y $\wedge$ entregan los mismos axiomas que en $\mathcal{S}_{2,1}$, por ser iguales las fórmulas que separan valores y los valores en la tabla.

Obtenemos así las siguientes expresiones:

$$b(\alpha) = 0, b(\beta) = 0 \to b(\alpha\vee\beta) = 0$$
$$b(\alpha) = 1 \to b(\alpha\vee\beta) = 1, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right) = 0$$
$$b(\beta) = 1 \to b(\alpha\vee\beta) = 1, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right) = 0$$
$$b(\alpha) = 0 \to b(\alpha\wedge\beta) = 0$$
$$b(\beta) = 0 \to b(\alpha\wedge\beta) = 0$$
$$b(\alpha) = 1, b(\beta) = 1 \to b(\alpha\wedge\beta) = 1, , b\left(\neg(\alpha\wedge\beta)\right) = 0$$

Los axiomas que definen las bivaluaciones son:

- ◇ G1
- ◇ G2
- ◇ $G^1_{2,2}$:

$$\begin{aligned} b(\alpha) = 0 \to b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 0,& \\ b(\alpha\to\beta) = 1, b(\neg(\alpha\to\beta)) = 0,& \\ b(\alpha\wedge\beta) = 0,& \\ b(\beta\wedge\alpha) = 0& \end{aligned}$$

- ◇ $\mathrm{G}^2_{2,2}: b(\alpha)=1, b(\neg\alpha)=1 \to b(\neg\neg\alpha=0)$
- ◇ $\mathrm{G}^3_{2,2}:$

$$\begin{aligned} b(\beta)=1 \to b(\alpha\to\beta)=1, b(\neg(\alpha\to\beta))=0,\\ b(\alpha\vee\beta)=1, b\left(\neg(\alpha\vee\beta)\right)=0,\\ b(\beta\vee\beta)=1, b\left(\neg(\beta\vee\alpha)\right)=0 \end{aligned}$$

- ◇ $\mathrm{G}^4_{2,2}: b(\alpha)=1, b(\beta)=0 \to b(\alpha\to\beta)=0$
- ◇ $\mathrm{G}^5_{2,2}: b(\alpha)=0, b(\beta)=0 \to b(\alpha\vee\beta)=0$
- ◇ $\mathrm{G}^6_{2,2}: b(\alpha)=1, b(\beta)=1 \to b(\alpha\wedge\beta)=1, b\left(\neg(\alpha\wedge\beta)\right)=0$

Sistema Deductivo $\mathcal{S}_{2,2}$

Este sistema es conocido como la lógica P^1 de Sette [Set73]. Aparece en [Car+01] bajo el nombre P^1_1 y en [FC03] bajo el nombre P^1. La única regla de inferencia es Modus Ponens y los axiomas son:

$\mathrm{A}_{2,2}1$ Los axiomas de SLPPL

$\mathrm{A}_{2,2}2$ $(\neg\alpha)^\circ$

$\mathrm{A}_{2,2}3$ $\beta^\circ \to ((\alpha\to\beta)\to((\alpha\to\neg\beta)\to\neg\alpha))$

Demostraremos en primer lugar que se trata de axiomas correctos, es decir, que se tiene $\vDash_{\mathcal{M}_{2,2}} A$ para los axiomas $\mathrm{A}_{2,2}2$ y $\mathrm{A}_{2,2}3$.

$\mathrm{A}_{2,2}2$ Basta con notar que se tiene $\neg\alpha \in \{0,1\}$.

$\mathrm{A}_{2,2}3$ Idéntico a $\mathrm{A}_{2,1}3$, notando que también se tiene para este sistema $\left[\frac{1}{2}\right]^\circ = 0$.

Como los axiomas de SLPPL son correctos, y lo es también la regla de inferencia MP; tenemos que si $\Gamma \vdash_{\mathcal{S}_{2,2}} \varphi$, entonces $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}_{2,2}} \varphi$

Lema 2.35. *En $\mathcal{S}_{2,2}$ se satisface:*

1. $\beta^\circ, \beta \vdash \neg\neg\beta$
2. $\neg\beta, \beta^\circ \vdash \beta\to\gamma$
3. $\beta, \gamma^\circ, \neg\gamma \vdash \neg(\beta\to\gamma)$
4. $\neg(\alpha\wedge\alpha) \vdash \neg\alpha$
5. $\vdash \alpha\vee\neg\alpha$

6. $\beta \to \alpha, \neg\beta \to \alpha \vdash \alpha$

Demostración. 1. Sabemos por el Corolario 2.7 que $\beta \vdash \alpha \to \beta$ y por el Corolario 2.6 que $\vdash \alpha \to \alpha$; además tenemos la siguiente expresión que se obtiene de reemplazar α por $\neg\beta$ en el axioma $A_{2,2}3$:

$$\vdash \beta^{\circ} \to ((\neg\beta \to \beta) \to ((\neg\beta \to \neg\beta) \to \neg\neg\beta))$$

basta entonces con usar MP con las expresiones iniciales, reemplazando α por $\neg\beta$ y obtenemos lo buscado.

2. Idéntico a 2.31,3
3. Idéntico a 2.31,4
4. Idéntico a 2.31,5, usando que los axiomas $A_{2,2}3$ y $A_{2,1}3$ son iguales.
5. Idéntico a 2.31,6, usando que los axiomas $A_{2,2}3$ y $A_{2,1}3$ son iguales.
6. Idéntico a 2.31,7, usando que los axiomas $A_{2,2}3$ y $A_{2,1}3$ son iguales. □

Lema 2.36. *Sea α una fórmula cuyas variables proposicionales están en el conjunto $\{p_1 \dots p_n\}$. Para una valuación (algebráica) v se define:*

$$\alpha' = \begin{cases} \alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \alpha, & \textit{si } v(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \neg\alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases} \qquad \overline{\alpha} = \begin{cases} \alpha^{\circ}, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \neg(\alpha^{\circ}), & \textit{si } v(\alpha) = \frac{1}{2} \\ \alpha^{\circ}, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Entonces $\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p'_1, \dots, p'_n \vdash_{S_{2,2}} \alpha'$

Demostración.

- ◇ Si $\alpha = p$, se tiene $\alpha' = p'$, luego, como $p' \vdash p'$ se satisface el Lema
- ◇ Si $\alpha = \neg\beta$, entonces α y β comparten las variables proposicionales; tendremos entonces distintos casos dependiendo del valor de la valuación en β; de los cuales $\beta^v = 1$ y $\beta^v = 0$ son idénticos al Lema 2.32. Si $\beta^v = \frac{1}{2}$, entonces $\beta = p = p'$, por otro lado, $v(\alpha) = 0$, luego $\alpha' = \neg\neg\beta$ y basta para concluir usar el Lema 2.35,1

En el Lema 2.32 utilizamos que cuando $v(\beta) = 0$, teníamos $\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p'_1, \dots, p'_n \vdash_{S_{2,2}} \beta^{\circ}$, en aquel Lema utilizamos un resultado que en este caso no tenemos (básicamente 2.31,1). Tenemos si embargo aquí otras herramientas. Si β es compleja, tenemos $\vdash \beta^{\circ}$; si $\beta = \neg^k p$, con $k \geq 1$, tenemos del axioma $A_{2,2}2$ que se cumple $\vdash \beta^{\circ}$; falta entonces solamente observar que si $\beta = p$ y $v(\beta) = 0$, entonces $\overline{p} = p^{\circ}$. Teniendo este resultado solo hace falta replicar los argumentos de 2.32 para solucionar los casos en que α es compleja. □

Los siguientes dos teoremas se demuestran de manera idéntica a los correspondientes a $\mathcal{S}_{2,2}$, reemplazando en el argumento los lemas (que dicen exactamente lo mismo para sus respectivos sistemas) 2.31,7 por 2.35,6.

Lema 2.37. *Sea α una $\mathcal{M}_{2,2}$-tautología; entonces se tiene $\vdash_{\mathcal{S}_{2,2}} \alpha$.*

Teorema 2.38. *Completud para $S_{2,2}$: Si $\Sigma \vDash_{\mathcal{M}_{2,2}} \alpha$; entonces se tiene $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}_{2,2}} \alpha$.*

Al parecer la primera vez que se utiliza el método de Kalmár en el contexto de lógicas paraconsistentes es en éste sistema, como aparece en [Set73].

2.3.1.5. Algunas observaciones

Las matrices de tres valores no solo son relevantes por ser casos sencillos de matrices LPP reducidas, sino porque entre ellas se encuentran dos de las cuatro matrices que satisfacen $\alpha \leftrightarrow \sim\sim \alpha$[8]; además de tener todas la propiedad de ser maximales respecto a CPC, en el sentido de que si al sistema deductivo asociado le agregamos un axioma φ, obtenemos como sistema deductivo CPC, donde φ es una tautología de la lógica proposicional clásica que no es tautología para la lógica matricial correspondiente [LM06].

[8]las otras dos son la matriz de la lógica clásica y la matriz de cuatro valores que se estudiará en la sección siguiente

2.3.2. $\mathcal{M}_4$

La matriz que estudiaremos es a la vez paraconsistente y paracompleta, es de hecho, la matriz más pequeña que tiene esta propiedad; y la única matriz reducida de 4 valores que satisface $\alpha \leftrightarrow \sim\sim \alpha$.

La matriz con la que trabajaremos es la siguiente:

$\mathcal{M}_4 = \langle \{0, \top, \perp, 1\}, \{\top, 1\}, \sim \rangle$, donde $\sim$ es la identidad fuera de $\{0, 1\}$

Las tablas de operaciones para este sistema son:

	0	$\perp$	$\top$	1
$\sim$	1	$\perp$	$\top$	0

$\rightarrow$	0	$\perp$	$\top$	1
0	1	1	1	1
$\perp$	1	1	1	1
$\top$	0	0	1	1
1	0	0	1	1

$\wedge$	0	$\perp$	$\top$	1
0	0	0	0	0
$\perp$	0	0	0	0
$\top$	0	0	1	1
1	0	0	1	1

$\vee$	0	$\perp$	$\top$	1
0	0	0	1	1
$\perp$	0	0	1	1
$\top$	1	1	1	1
1	1	1	1	1

Semántica Bivaluada

Primero necesitamos fórmulas que separen los valores en la matriz.

$$x = 0 \text{ si y solo si } t(x) = 0, t(\sim x) = 1$$
$$x = \perp \text{ si y solo si } t(x) = 0, t(\sim x) = 0$$
$$x = \top \text{ si y solo si } t(x) = 1, t(\sim x) = 1$$
$$x = 1 \text{ si y solo si } t(x) = 1, t(\sim x) = 0$$

La primera tabla nos entrega las siguientes ecuaciones en $\mathcal{M}_4$:

$$E_0(\alpha) \rightarrow E_1(\sim \alpha)$$
$$E_\perp(\alpha) \rightarrow E_\perp(\sim \alpha)$$
$$E_\top(\alpha) \rightarrow E_\top(\sim \alpha)$$
$$E_1(\alpha) \rightarrow E_0(\sim \alpha)$$

Lo que nos entrega los siguientes axiomas para la semántica gentzeniana:

$$b(\alpha) = 0, b(\neg\alpha) = 1 \rightarrow b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 0$$
$$b(\alpha) = 0, b(\neg\alpha) = 0 \rightarrow b(\neg\alpha) = 0, b(\neg\neg\alpha) = 0$$
$$b(\alpha) = 1, b(\neg\alpha) = 1 \rightarrow b(\neg\alpha) = 1, b(\neg\neg\alpha) = 1$$
$$b(\alpha) = 1, b(\neg\alpha) = 0 \rightarrow b(\neg\alpha) = 0, b(\neg\neg\alpha) = 1$$

En todos los casos podemos reducir, obteniendo

$$b(\alpha)=0, b(\neg\alpha)=1 \rightarrow b(\neg\neg\alpha)=0 \tag{2.52}$$
$$b(\alpha)=0, b(\neg\alpha)=0 \rightarrow b(\neg\neg\alpha)=0 \tag{2.53}$$
$$b(\alpha)=1, b(\neg\alpha)=1 \rightarrow b(\neg\neg\alpha)=1 \tag{2.54}$$
$$b(\alpha)=1, b(\neg\alpha)=0 \rightarrow b(\neg\neg\alpha)=1 \tag{2.55}$$

Escribiremos las instancias de G3 y G4 para esta matriz.

(G1)$_4$ $\top \rightarrow b(\alpha)=1 \mid b(\alpha)=0$

(G2)$_4$ $b(\alpha)=1, b(\alpha)=0 \rightarrow \perp$

(G3)$_4$ $b(\alpha)=1 \rightarrow E_1(\alpha) \mid E_\top(\alpha)$

(G4)$_4$ $b(\alpha)=0 \rightarrow E_0(\alpha) \mid E_\perp(\alpha)$

Es evidente de las expresiones (2.52)-(2.55) que $G3_4$ y $G4_4$ se deducen de $G1_4$. Además podemos reducir, usando $G1_4$ estas expresiones a

$$b(\alpha)=0 \rightarrow b(\neg\neg\alpha)=0 \tag{2.56}$$
$$b(\alpha)=1 \rightarrow b(\neg\neg\alpha)=1 \tag{2.57}$$

Estas dos expresiones son consecuencia de la propiedad de $\sim\sim \alpha=\alpha$.

Para la $\rightarrow$,$\vee$ y $\wedge$ reducimos como antes obteniendo las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} b(\alpha)=0 &\rightarrow E_1(\alpha\rightarrow\beta) \\ b(\alpha)=1, b(\beta)=0 &\rightarrow E_0(\alpha\rightarrow\beta) \\ b(\beta)=1 &\rightarrow E_1(\alpha\rightarrow\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\alpha)=1 &\rightarrow E_1(\alpha\vee\beta) \\ b(\beta)=1 &\rightarrow E_1(\alpha\vee\beta) \\ b(\alpha)=0, b(\beta)=0 &\rightarrow E_0(\alpha\vee\beta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b(\alpha)=0 &\rightarrow E_0(\alpha\wedge\beta) \\ b(\beta)=0 &\rightarrow E_0(\alpha\wedge\beta) \\ b(\alpha)=1, b(\beta)=1 &\rightarrow E_1(\alpha\wedge\beta) \end{aligned}$$

Traducimos entonces estas expresiones a bivaluaciones:

$$\begin{aligned} b(\alpha)=0 &\rightarrow b(\alpha\rightarrow\beta)=1, b(\neg(\alpha\rightarrow\beta))=0 \\ b(\beta)=1 &\rightarrow b(\alpha\rightarrow\beta)=1, b(\neg(\alpha\rightarrow\beta))=0 \\ b(\alpha)=1, b(\beta)=0 &\rightarrow b(\alpha\rightarrow\beta)=0, b(\neg(\alpha\rightarrow\beta))=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b(\alpha) = 0, b(\beta) = 0 \rightarrow b(\alpha \vee \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \vee \beta)\right) = 1 \\
b(\alpha) = 1 \rightarrow b(\alpha \vee \beta) = 1, b\left(\neg(\alpha \vee \beta)\right) = 0 \\
b(\beta) = 1 \rightarrow b(\alpha \vee \beta) = 1, b\left(\neg(\alpha \vee \beta)\right) = 0 \\
b(\alpha) = 0 \rightarrow b(\alpha \wedge \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \wedge \beta)\right) = 1 \\
b(\beta) = 0 \rightarrow b(\alpha \wedge \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \wedge \beta)\right) = 1 \\
b(\alpha) = 1, b(\beta) = 1 \rightarrow b(\alpha \wedge \beta) = 1, b\left(\neg(\alpha \wedge \beta)\right) = 0
\end{aligned}$$

Los axiomas que definen las bivaluaciones son:

- ◇ G1
- ◇ G2
- ◇ G_4^1 :

$$\begin{aligned}
b(\alpha) = 0 \rightarrow b(\neg\neg\alpha) = 0,& \\
& b(\alpha \wedge \beta) = 0, b\left(\neg(\alpha \wedge \beta)\right) = 1, \\
& b(\beta \wedge \alpha) = 0, b\left(\neg(\beta \wedge \alpha)\right) = 1, \\
& b(\alpha \rightarrow \beta) = 1, b(\neg\,(\alpha \rightarrow \beta)) = 0
\end{aligned}$$

- ◇ G_4^2 :

$$\begin{aligned}
b(\alpha) = 1 \rightarrow b(\neg\neg\alpha) = 1,& \\
& b(\alpha \vee \beta) = 1, b\left(\neg(\alpha \vee \beta)\right) = 0, \\
& b(\beta \vee \alpha) = 1, b\left(\neg(\beta \vee \alpha)\right) = 0, \\
& b(\beta \rightarrow \alpha) = 1, b(\neg\,(\beta \rightarrow \alpha)) = 0
\end{aligned}$$

- ◇ $G_4^3 : b(\alpha) = 1, b(\beta) = 1 \rightarrow b(\alpha \wedge \beta) = 1, b(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 0$
- ◇ $G_4^4 : b(\alpha) = 0, b(\beta) = 0 \rightarrow b(\alpha \vee \beta) = 0, b(\neg(\alpha \wedge \beta)) = 1$
- ◇ $G_4^5 : b(\alpha) = 1, b(\beta) = 0 \rightarrow b(\alpha \rightarrow \beta) = 0, b(\neg(\alpha \rightarrow \beta)) = 1$

Sistema Deductivo $\mathcal{S}_4$

La siguiente axiomatización aparece en [LM06] bajo el nombre S^4; la única regla de inferencia es Modus Ponens y los axiomas son:

$A_{1,3}1$ Los axiomas de SLPPL

$A_{1,3}2$ $\alpha \leftrightarrow \neg\neg\alpha$

$A_{1,3}3$ $(\alpha^{\bullet} \wedge \beta^{\circ}) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow \neg\alpha))$

Demostraremos en primer lugar que se trata de axiomas correctos, es decir, que se tiene $\vDash_{\mathcal{M}_4} A$ para los axiomas $A_4 2$ y $A_4 3$.

$A_4 2$ Verificación inmediata.

$A_4 3$ Para que se tenga $v\left(\left(\alpha^{\bullet}\wedge\beta^{\circ}\right)\rightarrow\left((\alpha\rightarrow\beta)\rightarrow\left((\alpha\rightarrow\neg\beta)\rightarrow\neg\alpha\right)\right)\right)=0$ se debe tener

$$\begin{aligned} v\left(\alpha^{\bullet}\wedge\beta^{\circ}\right) &= 1 \\ v\left(\alpha\rightarrow\beta\right) &= 1 \\ v\left(\alpha\rightarrow\neg\beta\right) &= 1 \\ v\left(\neg\alpha\right) &\notin \{1,\top\} \end{aligned}$$

De la primera expresión deducimos que $v(\alpha)\neq\bot$ y que $v(\beta)\neq\top$; de la segunda y la tercera, junto con lo ya dicho, que $v(\beta)=1$ o $v(\alpha)=0$ y que $v(\alpha)=0$ o $v(\beta)=0$; así $v(\alpha)=0$ y por tanto $v(\neg\alpha=1)$, lo que nos lleva a una contradicción; luego para toda valuación se tiene $v\left(A_4 3\right)=1$

Como los axiomas de SLPPL son correctos, y lo es también la regla de inferencia MP; tenemos que si $\Gamma\vdash_{\mathcal{S}_4}\varphi$, entonces $\Gamma\vDash_{\mathcal{M}_4}\varphi$.

Lema 2.39. *En $\mathcal{S}_4$ se satisface:*

1. $\vdash\beta^{\circ}\leftrightarrow\left(\neg^{k}\beta\right)^{\circ}$
2. $\vdash\beta^{\bullet}\leftrightarrow\left(\neg^{k}\beta\right)^{\bullet}$
3. $\neg\beta^{\circ}\vdash\beta\leftrightarrow\neg\beta$
4. $\neg\beta^{\bullet}\vdash\neg(\neg\beta\wedge\neg\beta$
5. $\beta^{\circ},\neg\beta\vdash\beta\rightarrow\gamma$
6. $\beta\wedge\neg\beta\vdash\neg^{k}\beta$
7. $\gamma^{\circ},\beta,\neg\gamma\vdash\neg(\beta\rightarrow\gamma)$

Demostración.

1. Casi idéntico a 2.23,1, usando que $A_4 2$ es igual a $A_{1,1}2$.
2. Idéntico a 2.23,1, usando que $A_4 2$ es igual a $A_{1,1}2$.
3. Sabemos de SLPPL que si α es compleja, $\neg\neg\alpha\vdash\alpha$; luego $\neg\beta^{\circ}\vdash\beta\wedge\neg\beta$. Por otro lado, por los axiomas de SLPPL tenemos que $\beta\wedge\neg\beta\vdash\beta$ y $\beta\wedge\neg\beta\vdash\neg\beta$; usando ambos resultados y el Lema 2.7 obtenemos que

$$\neg\neg\left(\beta\wedge\neg\beta\right)\vdash\beta\leftrightarrow\neg\beta$$

4. Sabemos de SLPPL que $\neg(\gamma\vee\alpha) \vdash \neg(\alpha\wedge\alpha)$; usamos este resultado reemplazando γ por β y α por $\neg\beta$ para obtener lo buscado.

5. Idéntico a 2.31,3

6. Si k es par, digamos $k = 2t$ sabemos que $\beta\leftrightarrow\neg^{2t}\beta$ por $A_4 2$, además $\beta\wedge\neg\beta \vdash \beta$; luego $\beta\wedge\neg\beta \vdash \neg^k\beta$. Si k es impar, digamos $k = 2t + 1$ sabemos que $(\neg\beta) = \neg^{2t}(\neg\beta)$ por $A_4 2$; por otro lado $\beta\wedge\neg\beta \vdash \neg\beta$; luego $\beta\wedge\neg\beta \vdash \neg^k\beta$

7. Por Lema de Contraposición se tiene que demostrar 2.39,7 es equivalente a demostrar

$$\beta, \neg\gamma, \beta\rightarrow\gamma \vdash \gamma\wedge\neg\gamma$$

Basta entonces con usar MP y Corolario 2.9. □

A continuación demostraremos que el sistema es completo utilizando por última vez el método de Kalmar.

Lema 2.40. *Sea α una fórmula cuyas variables proposicionales están en el conjunto $\{p_1 \ldots p_n\}$. Para una valuación (algebráica) v se define:*

$$\alpha' = \begin{cases} \alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \alpha, & \textit{si } v(\alpha) = \top \\ \neg(\alpha\wedge\alpha), & \textit{si } v(\alpha) = \bot \\ \neg\alpha, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases} \qquad \overline{\alpha} = \begin{cases} \alpha^\circ\wedge\alpha^\bullet, & \textit{si } v(\alpha) = 1 \\ \neg(\alpha^\circ)\wedge\alpha^\bullet, & \textit{si } v(\alpha) = \top \\ \alpha^\circ\wedge\neg(\alpha^\bullet), & \textit{si } v(\alpha) = \bot \\ \alpha^\circ\wedge\alpha^\bullet, & \textit{si } v(\alpha) = 0 \end{cases}$$

Entonces

- ◇ $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash_{S_4} \overline{\alpha}$
- ◇ $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash_{S_4} \alpha'$

Demostración. Demostraremos primero algunas pequeñas proposiciones que nos serán útiles luego.

Proposición 1. *Si $v(\beta) = 0$ (o $v(\beta) = 1$), entonces $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n} \vdash_{S_4} \beta^\circ$*

Demostración. Si β es compleja, se tiene inmediatamente $\vdash \beta^\circ$. Si β es de la forma $\neg^k p$, entonces sabemos que $v(p) = 1$ si k es impar o $v(p) = 0$ si k es par. En cualquiera de los dos casos tenemos $\overline{p} = p^\circ\wedge p^\bullet$; luego, $\overline{p} \vdash p^\circ$. Por el Lema 2.39,1 se tiene que $p^\circ \vdash \beta^\circ$. (El caso $v(\beta) = 1$ se trata de manera idéntica) □

Proposición 2. *Si $v(\beta) = \top$ ($v(\beta) = \bot$), entonces $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n} \vdash_{S_4} \neg\beta^\circ$ ($\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n} \vdash_{S_4} \beta^\circ$)*

Demostración. β es de la forma $\neg^k p$, con $v(p) = \top$, por tanto $\overline{p} = \neg p^\circ\wedge p^\bullet$; luego, $\overline{p} \vdash \neg p^\circ$. Por el Lema 2.39,1 se tiene que $\neg p^\circ \vdash \neg\beta^\circ$. (El caso $v(\beta) = \bot$ se trata de manera idéntica) □

Del mismo modo en que demostramos estas proposiciones (cambiando en el argumento el Lema 2.39,1 por el Lema 2.39,2) podemos demostrar:

Proposición 3. *Si* $v(\beta) = 0$ *(o* $v(\beta) = 1$*), entonces* $\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n} \vdash_{S_4} \beta^{\bullet}$

Proposición 4. *Si* $v(\beta) = \perp$ *(*$v(\beta) = \top$*), entonces* $\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n} \vdash_{S_4} \neg\beta^{\bullet}$ *(*$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n} \vdash_{S_4} \beta^{\bullet}$*)*

Usando estas cuatro proposiciones demostramos

$$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash_{S_4} \overline{\alpha}$$

Demostraremos la segunda parte del Lema por inducción sobre el tamaño de la fórmula.

- ⋄ Si $\alpha = p$, se tiene $\alpha' = p'$ y $\overline{\alpha} = \overline{p}$, luego, como $p' \vdash_{S_4} p'$ y $\overline{p} \vdash_{S_4} \overline{p}$ se satisface el Lema

- ⋄ Si $\alpha = \neg\beta$, entonces α y β comparten las variables proposicionales; revisamos los distintos casos posibles:

  - Si $\beta^v = 1$, entonces $\alpha^v = 0$, por tanto $\beta' = \beta$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg\neg\beta$. Luego por hipótesis de inducción se tiene

    $$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash \beta$$

    y por axioma $A_4 2$ se tiene

    $$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \alpha'$$

  - Si $\beta^v = 0$, entonces $\alpha^v = 1$, por tanto $\beta' = \neg\beta = \alpha = \alpha'$. Por hipótesis de inducción se tiene lo buscado

    $$\overline{p_1}, \dots, \overline{p_n}, p_1', \dots, p_n' \vdash_{S_{1,1}} \alpha'$$

  - Si $\beta^v = \top$, entonces $\alpha^v = \top$, además se tiene que $\beta = \neg^k p$ y $v(p) = \top$. Luego $\beta' = \beta = \neg^k p$ y $\alpha' = \alpha = \neg^{k+1} p$. Además $\overline{p} \vdash \neg(p^{\bullet})$; y por Lema 2.39,1, $\overline{p} \vdash \neg\left(\neg^k p^{\bullet}\right)$. Concluimos entonces que $\overline{p} \vdash \neg\neg\left(\neg^k p \wedge \neg^{k+1} p\right)$, y por tanto $\overline{p} \vdash \neg^{k+1} p$.
  - Si $\beta^v = \perp$, entonces $\alpha^v = \perp$, además se tiene que $\beta = \neg^k p$ y $v(p) = \perp$. Luego $\beta' = \neg(\beta \wedge \beta)$ y $\alpha' = \neg(\alpha \wedge \alpha)$. Además $\overline{p} \vdash \neg(p^{\circ})$; y por Lema2.39,2, $\overline{p} \vdash \neg\left(\neg^k p^{\circ}\right)$. Concluimos entonces que $\overline{p} \vdash \neg\left(\neg^k p \vee \neg^{k+1} p\right)$, y por tanto $\overline{p} \vdash \neg(\neg^{k+1} p \wedge \neg^{k+1} p)$.

- ⋄ Si $\alpha = \beta \to \gamma$ las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y de γ.

- Si $\beta^v = 0$ se tiene $\alpha^v = 1$, y por tanto $\alpha' = \alpha = \beta \rightarrow \gamma$ y $\beta' = \neg\beta$ por la proposición 1 y la hipótesis de inducción tenemos:

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \beta^\circ$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \neg\beta$$

  Luego usando 5 obtenemos lo buscado.

- Si $\beta^v = \bot$, entonces $\alpha^v = 1$, $\beta' = \neg(\beta \wedge \beta)$ y $\alpha' = \alpha = \beta \rightarrow \gamma$; usando directamente la hipótesis de inducción, concluimos usando $\neg(\beta \wedge \beta) \vdash \beta \rightarrow \gamma$, resultado conocido de SLPPL.

- Si $\gamma^v \in \{\top, 1\}$, entonces $\alpha^v = 1$, $\gamma' = \gamma$ y $\alpha' = \alpha$, luego basta con usar la hipótesis de inducción y Coro. 2.7 para obtener lo buscado

- Si $\beta^v \in \{\top, 1\}$ y $\gamma^v = 0$ se tiene $\alpha^v = 0$, por lo cual $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \rightarrow \gamma)$, $\beta' = \beta$ y $\gamma' = \neg\gamma$. Por la proposición 1 y la hipótesis de inducción tenemos:

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \gamma^\circ$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \neg\gamma$$
$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \beta$$

  Luego por Lema 2.39,7 se tiene lo buscado.

- Si $\beta^v \in \{\top, 1\}$ y $\gamma^v = \bot$ se tiene $\alpha^v = 0$, y por tanto $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \rightarrow \gamma)$, $\beta' = \beta$ y $\gamma' = \neg(\gamma \wedge \gamma)$; basta entonces con usar la hipótesis de inducción y observar que de SLPPL se tiene $\beta, \neg(\gamma \wedge \gamma) \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma)$.

◇ Si $\alpha = \beta \wedge \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v = 0$, entonces $\alpha^v = 0$ y se tiene $\beta' = \neg\beta$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \wedge \gamma)$. Tenemos además por la Proposición 1

$$\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \beta^\circ$$

  Luego por Lema 2.39,5 se tiene $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p_1', \ldots, p_n' \vdash \neg(\beta \rightarrow \beta)$; y sabemos de SLPPL que $\neg(\beta \rightarrow \beta) \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$

- Si $\gamma^v = 0$, se trata de manera idéntica al caso anterior, usando que en SLPPL se satisface $\neg(\gamma \rightarrow \gamma) \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$.

- Si $\beta^v = \bot$ o $\gamma^v = \bot$, se tiene respectivamente $\beta' = \neg(\beta \wedge \beta)$, $\gamma' = \neg(\gamma \wedge \gamma)$. En cualquiera de los dos casos se tiene $\alpha^v = 0$ y $\alpha' = \neg\alpha = \neg(\beta \wedge \gamma)$. Bastará entonces con usar la hipótesis de inducción y que se tiene $\neg(\beta \wedge \beta) \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$ y $\neg(\gamma \wedge \gamma) \vdash \neg(\beta \wedge \gamma)$, ambos resultados conocidos de SLPPL.

- Si $\beta^v \in \{\top, 1\}$ y $\gamma^v \in \{\top, 1\}$, entonces se tiene $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$ y $\alpha' = \alpha$. basta entonces con usar la hipótesis de inducción y el Coroloario 2.9.

◇ Si $\alpha = \beta \vee \gamma$, entonces las variables proposicionales de α es la unión de las variables de β y γ.

- Si $\beta^v \in \{\top, 1\}$ o $\gamma^v \in \{\top, 1\}$, entonces se tiene respectivamente $\beta' = \beta$ o $\gamma' = \gamma$; en ambos casos $\alpha' = \alpha$. Basta con usar la hipótesis de inducción y el axioma de SLPPL A6 o A7 respectivamente.
- Si $\beta^v = 0$ y $\gamma^v \in \{\perp, 0\}$ tenemos $\alpha^v = 0$, $\beta' = \neg\beta$ y $\alpha' = \neg\alpha$. Por la proposición 1, hipótesis de inducción y Lema 2.39,5 tenemos $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\beta \to \beta$. Si $\gamma^v = \perp$ se tiene $\gamma' = \neg(\gamma \wedge \gamma)$ y si $\gamma^v = 0$ se tiene por las mismas razones que para β $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_n}, p'_1, \ldots, p'_n \vdash \neg\gamma \to \gamma$. Usamos para concluir (respectivamente) los resultados de SLPPL:

$$\neg(\beta \to \beta), \neg(\gamma \wedge \gamma) \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$$
$$\neg(\beta \to \beta), \neg(\gamma \to \gamma) \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$$

- Si $\gamma^v = 0$ y $\beta^v \in \{\perp, 0\}$ es casi identico al anterior.
- Si $\gamma^v = \perp$ y $\beta^v = \perp$ se tiene $\beta' = \neg(\beta \wedge \beta)$, $\gamma' = \neg(\gamma \wedge \gamma)$ y $\alpha' = \neg\alpha$. Basta con usar la hipótesis de inducción y el hecho conocido de SLPPL: $\neg(\beta \wedge \beta), \neg(\gamma \wedge \gamma) \vdash \neg(\beta \vee \gamma)$. □

Lema 2.41. *Sea α una $\mathcal{M}_4$-tautología; entonces se tiene $\vdash_{\mathcal{S}_4} \alpha$.*

Demostración. Al igual que en las versiones del lema para matrices de tres valores, al ser α una tautología, para cualquier valuación (algebráica) v se tiene $v(\alpha) = 1$, lo que implica que sin depender de la valuación escogida para la definición, $\alpha' = \alpha$. Sean $p_1, \ldots, p_n$ las variables proposicionales que aparecen en α. Supongamos que para algún $m \leq n$ se tiene que toda valuación $\overline{p_1}, \ldots, \overline{p_m}, p'_1, \ldots, p'_m \vdash_{S_{1,3}} \alpha$, donde $\overline{\beta}$ y β' se definen por la valuación. Escogemos cuatro valuaciones v_1, v_2, v_3, v_4 que coinciden en $\langle p_1, \ldots, p_{m-1} \rangle$ y tales que $v_1(p_m) = 1$, $v_2(p_m) = \top$, $v_3(p_m) = \perp$ y $v_4(p_m) = 0$. Usando la hipótesis se tiene que:

$$\Sigma, p_m^{\bullet}, p_m^{\circ}, p_m \vdash \alpha \tag{2.58}$$
$$\Sigma, p_m^{\bullet}, \neg p_m^{\circ}, p_m \vdash \alpha \tag{2.59}$$
$$\Sigma, \neg p_m^{\bullet}, p_m^{\circ}, \neg(p_m \wedge p_m) \vdash \alpha \tag{2.60}$$
$$\Sigma, p_m^{\bullet}, p_m^{\circ}, \neg(p_m) \vdash \alpha \tag{2.61}$$

Donde, como antes, $\Sigma = \left\langle \overline{p_1}, \ldots, \overline{p_{m-1}}, p'_1, \ldots, p'_{m-1} \right\rangle$, definido por cualquiera de las valuaciones. Lo primero que haremos es hacer las reducciones triviales dadas por resultados de SLPPL y aplicamos el Teorema de deducción:

$$\Sigma, p_m^{\circ} \vdash p_m \to \alpha \tag{2.62}$$
$$\Sigma \vdash \neg p_m^{\circ} \to \alpha \tag{2.63}$$
$$\Sigma, p_m^{\circ} \vdash \neg p_m^{\bullet} \to \alpha \tag{2.64}$$
$$\Sigma, p_m^{\circ} \vdash \neg(p_m) \to \alpha \tag{2.65}$$

De (2.62) y (2.65) obtenemos (usando el axioma A8 de SLPPL y MP):

$$\Sigma, p_m^\bullet, p_m^\circ \vdash \alpha$$

usando deducción obtenemos

$$\Sigma, p_m^\circ \vdash p_m^\bullet \to \alpha \tag{2.66}$$

De (2.64) y (2.66) obtenemos (nuevamente usando el axioma A8 de SLPPL y MP):

$$\Sigma, p_m^\circ, (p_m^\bullet)^\bullet \vdash \alpha$$

Pero como $p_m^\bullet$ es compleja, podemos eliminar $(p_m^\bullet)^\bullet$ y obtener:

$$\Sigma, p_m^\circ \vdash \alpha \tag{2.67}$$

Finalmente, procediendo de manera similar al paso anterior, de 2.63 y 2.67 obtenemos

$$\Sigma \vdash \alpha \tag{2.68}$$

Nuevamente los valores sobre $\langle p_1, \ldots, p_{m-1}\rangle$ de las valuaciones son arbitrarios (aunque comunes a v_1, v_2, v_3 y v_4), luego sin importar la valuación usada para la definición de $\overline{\beta}$ y β' se satisface (2.68). Aplicando el Lema 2.40 se tiene el caso base de $n = m$, luego usando lo demostrado podemos eliminar de la hipótesis una a una las n variables proposicionales que aparecen en α; llegando a $\vdash \alpha$. $\square$

Teorema 2.42. *Completud para S_4: Si para toda $\mathcal{M}_4$-tautología se tiene $\vdash_{\mathcal{S}_4} \alpha$; entonces si $\Sigma \vDash_{\mathcal{M}_4} \alpha$ entonces $\Sigma \vdash_{\mathcal{S}_4} \alpha$. La demostración es idéntica a la del Teorema 2.26*

CAPÍTULO 3

Lógicas matriciales de primer orden

Utilizaremos en este capítulo lenguajes de primer orden determinado por los siguientes elementos:

- ◇ Conectivos proposicionales $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ y $\neg$; los tres primeros binarios y el último unario.
- ◇ Variables (una para cada entero positivo n): $v_1, v_2, \ldots$
- ◇ Símbolo de igualdad: $\approx$, que podrá estar o no presente.
- ◇ Parámetros
  - Símbolos de cuantificación: $\forall$, $\exists$.
  - Símbolos de predicado, o de relación: Para cada entero positivo n un conjunto numerable (posiblemente vacío) de símbolos llamados símbolos de predicado n-arios.
  - Símbolos de función: Para cada entero positivo n un conjunto numerable (posiblemente vacío) de símbolos llamados símbolos de función n-arios.
  - Símbolos de constante: un conjunto numerable (posiblemente vacío) de símbolos.

Llamaremos a este tipo de lenguajes de primer orden *Lenguaje FOLPP*. Llamaremos el conjunto de los *literales* de $\mathcal{F}m$ al conjunto $\mathcal{L}it$ de todas las fórmulas de la forma $\neg^k\varphi$, donde φ es de la forma $R_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$. Las fórmulas que contienen un conectivo binario o un cuantificador serán llamadas complejas, si el lenguaje contiene el símbolo de igualdad, entonces las fórmulas de la forma $\tau \approx \sigma$ también serán llamadas complejas.

3.1. Satisfacción

Tendremos para este lenguaje una noción de satisfacción similar a la de la Lógica de Primer Orden clásica, bajo esta satisfacción tendremos que las fórmulas complejas (en particular aquellas de la forma $\tau \approx \sigma$) se comportan de forma clásica.

Definición. Sea $\mathcal{L}_1$ un lenguaje FOLPP tal que su conjunto de símbolos de predicado es $\{R_i, i \in I\}$ de aridad $\varrho(R_i)$, su conjunto de símbolos de función es $\{f_j, j \in J\}$ de aridad $\varrho(f_i)$ y su conjunto de símbolos de constante es $\{c_k, k \in K\}$; y sea $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{D}, \sim\rangle$ una matriz LPP. Un $\mathcal{M}$-modelo para el lenguaje $\mathcal{L}_1$ es una estructura $\mathfrak{A} = \left\langle A, \hat{R}_i, \hat{f}_j, \hat{c}_k \right\rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$ donde:

- $\diamond$ para cada $i \in I$, $\hat{R}_i : A^{\varrho(R_i)} \longrightarrow M$ función.
- $\diamond$ para cada $j \in J$, $\hat{f}_i : A^{\varrho(f_i)} \longrightarrow A$ función.
- $\diamond$ para cada $k \in K$, $\hat{c}_i \in A$.

Definición. Llamaremos asignación a una función $s : Var \longrightarrow A$. Podemos extender de manera natural esta asignación a todos los términos de $\mathcal{L}_1$ de forma recursiva (llamaremos a esta función igualmente s):

- $\diamond$ $s(c_k) = \hat{c_k}$, para todo $k \in K$
- $\diamond$ $s\left(f_j(\tau_1, \ldots, \tau_n)\right) = \hat{f}_j\left(s(\tau_1), \ldots, s(\tau_n)\right)$

Definición. Diremos que un $\mathcal{M}$-modelo $\mathfrak{A}$ satisface una fórmula φ para una asignación s (notación $\mathfrak{A} \models_{\mathbb{M}} \varphi\,[s]$, $\mathfrak{A} \vDash \varphi\,[s]$ o $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi\,[s]$) si ocurre alguna de las situaciones siguientes (dependiendo de la forma de φ):

- $\diamond$ $\mathfrak{A} \vDash R_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,[s]$ si y solo si $\hat{R}_i\left(s(\tau_1), \ldots, s(\tau_n)\right) \in \mathcal{D}$
- $\diamond$ $\mathfrak{A} \vDash \tau_1 \approx \tau_2\,[s]$ si y solo si $s(\tau_1) = s(\tau_2)$
- $\diamond$ $\mathfrak{A} \vDash \psi\wedge\omega\,[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \vDash \psi\,[s]$ y $\mathfrak{A} \vDash \omega\,[s]$
- $\diamond$ $\mathfrak{A} \vDash \psi\vee\omega\,[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \vDash \psi\,[s]$ y/o $\mathfrak{A} \vDash \omega\,[s]$
- $\diamond$ $\mathfrak{A} \vDash \psi\rightarrow\omega\,[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \nvDash \psi\,[s]$ y/o $\mathfrak{A} \vDash \omega\,[s]$
- $\diamond$ $\mathfrak{A} \vDash \forall x\psi(x)\,[s]$ si y solo si para todo $a \in A$, $\mathfrak{A} \vDash \psi\,[s(x|a)]$
- $\diamond$ $\mathfrak{A} \vDash \exists x\psi(x)\,[s]$ si y solo si para algún $a \in A$, $\mathfrak{A} \vDash \psi\,[s(x|a)]$
- $\diamond$ $\mathfrak{A} \vDash \neg^k R_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,[s]$ si y solo si $\sim^k \hat{R}_i\left(s(\tau_1), \ldots, s(\tau_n)\right) \in \mathcal{D}$
- $\diamond$ Para ϕ una fórmula no literal $\mathfrak{A} \vDash \neg\phi\,[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \nvDash \varphi\,[s]$

  Donde $s(x|a) = \begin{cases} s(y) & \text{si } y \neq x \\ a & \text{si } y = x \end{cases}$

Observamos que la igualdad se trata de manera clásica, y que sobre fórmulas no literales el comportamiento de la negación también es clásico. Vale la pena detenerse para hacer algunas observaciones:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models \neg\forall x R(x)\,[s] &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \not\models \forall x R(x)\,[s]\\
&\text{ si y solo si para algún } a \in A,\, \mathfrak{A} \not\models R(x)\,[s(x|a)]\\
&\text{ si y solo si para algún } a \in A,\, \hat{R}(a) \notin \mathcal{D}\\
\mathfrak{A} \models \exists x \neg R(x)\,[s] &\text{ si y solo si para algún } a \in A,\, \mathfrak{A} \not\models \neg R(x)\,[s(x|a)]\\
&\text{ si y solo si para algún } a \in A,\, \neg\hat{R}(a) \in \mathcal{D}
\end{aligned}$$

Así, cuando φ es literal, no se tiene equivalencia entre $\neg\forall x\varphi(x)$ y $\exists x\neg\varphi(x)$; equivalencia que si se da evidentemente cuando φ no es literal.

Teorema 3.1. *Sea $\mathcal{M}$ una matriz LPP, $\mathfrak{A}$ un $\mathcal{M}$ modelo, α una fórmula del lenguaje. Si s_1 y s_2 son dos asignaciones sobre A que coinciden en todas las variables libres de φ (si es que las hay); entonces*

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{M}} \alpha\,[s_1] \textit{ si y solo si } \mathfrak{A} \models_{\mathbb{M}} \alpha\,[s_2]$$

Demostración. Sean s_1 y s_2 dos asignaciones sobre A que coinciden en todas las variables libres de α. Demostraremos el teorema por inducción:

- ◇ Si α es $\neg^k R_i(\tau_1 \cdots \tau_n)$, entonces todas las variables que ocurren en α lo hacen de manera libre; luego s_1 y s_2 coinciden en todas las variables que aparecen en α, y por tanto, en las que aparecen en cada uno de los términos τ_j. Entonces (haciendo una sencilla inducción) sabemos que $s_1(\tau_j) = s_2(\tau_j)$ para cada j. Luego

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{M}} \neg^k R_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,[s_1] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models_{\mathbb{M}} \neg^k R_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)\,[s_2]$$

- ◇ Si α es $\tau_1 \approx \tau_2$, es similar al caso anterior.

- ◇ Si α es $\varphi\vee\psi$; $\varphi\wedge\psi$ o $\varphi\rightarrow\psi$; es inmediato de la hipótesis de inducción, observando que si y aparece libre en φ o ψ, lo hace en α.

- ◇ Si α es $\forall x\varphi$ o $\exists x\varphi$, entonces las variables libres de α son las variables libres en φ exceptuando x. Por tanto para cualquier $a \in A$, se tiene que $s_1(x|a)$ y $s_2(x|a)$ coinciden en todas las variables libres en φ; luego por hipótesis de inducción tenemos que para todo $a \in A$:

$$\mathfrak{A} \models_{\mathbb{M}} \varphi\,[s_1(x|a)] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models_{\mathbb{M}} \varphi\,[s_2(x|a)]$$

  Así, considerando la definición de satisfacción, obetenemos lo buscado.

- ◇ Si α es $\neg\varphi$, con φ no literal, es inmediato de la definición de satisfacción y de la hipótesis de inducción. □

Corolario 3.2. *Si σ es una oración, entonces ocurre exactamente uno de los dos casos siguientes:*

(a) Para toda asignación $\mathfrak{A}$ satisface σ

(b) Para toda asignación $\mathfrak{A}$ no satisface σ

Definición. Diremos que el $\mathcal{M}$-modelo $\mathfrak{A}$ satisface el conjunto de fórmulas Σ para una asignación s si todas las fórmulas en Σ son satisfechas en $\mathfrak{A}$ para la asignación s. Del mismo modo diremos en términos generales que el $\mathcal{M}$-modelo $\mathfrak{A}$ satisface el conjunto de fórmulas Σ si satisface tal conjunto para toda asignación s

Definición. Sea $\Gamma\subseteq\mathcal{F}m$; diremos que σ es $\mathcal{M}$-consecuencia lógica de Γ (notación: $\Gamma \vDash_{\mathcal{M}} \sigma$) si para cualquier $\mathcal{M}$-modelo $\mathfrak{A}$ y cualquier asignación s tal que $\mathfrak{A}$ satisface Γ para s, se tiene que $\mathfrak{A}$ satisface σ para la misma asignación s. Como en la sección anterior denotaremos $\gamma \vDash_{\mathcal{M}} \sigma$ en vez de $\{\gamma\} \vDash_{\mathcal{M}} \sigma$ y $\vDash_{\mathcal{M}} \sigma$ en vez de $\emptyset \vDash_{\mathcal{M}} \sigma$

Definición. Sea $\Gamma\subseteq\mathcal{F}m$, $\mathbb{M}$ una clase de matrices LPP; diremos que σ es $\mathbb{M}$-consecuencia tautológica de Γ (notación: $\Gamma \vDash_{\mathbb{M}} \sigma$) si para cualquier matriz $\mathcal{M}$ en $\mathbb{M}$ y cualquier $\mathcal{M}$-modelo $\mathfrak{A}$, se tiene que si $\mathfrak{A}$ satisface Γ, entonces $\mathfrak{A}$ satisface σ. Usaremos las mismas convenciones que las nombradas en la definición anterior.

Teniendo esta notación:

Proposición 5. *Son equivalentes las fórmulas:*

- $\forall x\varphi$ *y* $\forall x(\varphi\wedge\varphi)$
- $\exists x\varphi$ *y* $\exists x(\varphi\wedge\varphi)$
- $\neg\forall x\varphi$, $\neg\forall x(\varphi\wedge\varphi)$ *y* $\exists x\neg(\varphi\vee\varphi)$
- $\neg\exists x\varphi$, $\neg\exists x(\varphi\wedge\varphi)$ *y* $\forall x\neg(\varphi\vee\varphi)$

Proposición 6. *No son equivalentes las fórmulas:*

- $\forall x\neg\varphi$ *y* $\neg\exists x\varphi$
- $\exists x\neg\varphi$ *y* $\neg\forall x\varphi$

Proposición 7. *Se satisfacen las siguientes relaciones:*

- $\forall x\varphi \vDash_{LPP} \exists x\varphi$
- $\neg\exists x\varphi \vDash_{LPP} \neg\forall x\varphi$

Donde LPP es la clase de todas las matrices LPP.

Definición. Diremos que la fórmula φ es $\mathbb{M}$-válida si se tiene $\emptyset \models_{\mathbb{M}} \varphi$ (como antes denotamos simplemente $\models_{\mathbb{M}} \varphi$).

Lema 3.3. *Toda generalización universal de una fórmula válida es válida. Es decir, si* $\models_{\mathbb{M}} \varphi$*, entonces* $\models_{\mathbb{M}} \forall x\varphi$

Demostración. Sea φ una fórmula bien formada del lenguaje tal que $\models_{\mathbb{M}} \varphi$. Entonces sabemos que para cualquier estructura $\mathfrak{A}$ (es decir, para cualquier matriz $\mathcal{M} \in \mathbb{M}$; $\mathfrak{A}$ cualquier $\mathcal{M}$-modelo), y cualquier asignación en esta estructura $s : Var \to |\mathfrak{A}|$ se tiene $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \varphi$.

Observamos que $s(x|a)$ es una asignación y φ es válida, luego para cada $a \in A$ sabemos que $\mathfrak{A} \vDash \varphi\,[s(x|a)]$. Basta entonces con notar que por definición $\mathfrak{A} \vDash \forall x\varphi\,[s]$ ssi para todo a en A, $\mathfrak{A} \vDash \varphi\,[s(x|a)]$ $\square$

Definición. Llamaremos fórmulas primas a todas las fórmulas literales y a aquellas de la forma $\forall x\alpha$ o $\exists x\alpha$ (si tenemos símbolo de igualdad, entonces también serán primas las fórmulas de la forma $\tau_1 \approx \tau_2$); llamaremos no primas a las otras fórmulas, es decir aquellas que sean de la forma $\alpha{\to}\beta$, $\alpha{\vee}\beta$, $\alpha{\vee}\beta$ o $\neg^k\alpha$ con α no literal

Sea $\mathfrak{A}$ una estructura; consideremos una asignación $s : V \to |\mathfrak{A}|$; definimos una valuación v en el conjunto de las fórmulas primas por:

- $\diamond$ Si $\varphi \in \mathcal{L}it$: $v(\neg^k R_i(\tau_1 \cdots \tau_n)) = \sim^k R_i^{\mathfrak{A}}(s(\tau_1), \cdots, s(\tau_n)))$
- $\diamond$ Si φ es compleja: $v(\alpha) = 1$ si $\mathfrak{A} \vDash \alpha[s]$; $v(\alpha) = 0$ si $\mathfrak{A} \nvDash \alpha[s]$

Lema 3.4. *Consideremos la valuación* v *definida anteriormente y sea* $\overline{v}$ *su expansión al resto de las fórmulas (de la forma natural, respetando las operaciones asociadas a los conectivos proposicionales), y sea* α *una fórmula cualquiera del lenguaje de primer orden para LPP. Entonces* $\overline{v}(\alpha) \in \mathcal{D}$ *iff* $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$.

Demostración. Procedemos por inducción sobre las fórmulas. Tenemos de base las fórmulas primas.

- $\diamond$ Si α es $\neg^k R_i(\tau_1 \cdots \tau_n)$ es inmediato de la definición.
- $\diamond$ Si α es $\neg^k(\tau_1 \approx \tau_2)$; usamos las propiedades de $\sim$ y que siempre ocurre que $1 \in \mathcal{D}$ y $0 \notin \mathcal{D}$
- $\diamond$ Si α es $\varphi{\vee}\psi$; se tiene $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$ si y solo si $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ y/o $\vDash_{\mathfrak{A}} \psi[s]$; lo que por hipótesis de inducción es equivalente a $\overline{v}(\varphi) \in \mathcal{D}$ y/o $\overline{v}(\psi) \in \mathcal{D}$; que debido a la definición de las operaciones en $\mathcal{M}$ es equivalente a $\overline{v}(\varphi{\vee}\psi) = 1$.
- $\diamond$ Si α es $\varphi{\wedge}\psi$ es idéntico al anterior.
- $\diamond$ Si α es $\varphi{\to}\psi$; se tiene $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$ si y solo si $\nvDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$ y/o $\vDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$; lo que por hipótesis de inducción es equivalente a $\overline{v}(\varphi) \notin \mathcal{D}$ y/o $\overline{v}(\psi) \in \mathcal{D}$; que de acuerdo a las operaciones en $\mathcal{M}$ es equivalente a $\overline{v}(\varphi \to \psi) = 1$.

- Si α es $\neg\varphi$, con φ no literal, sabemos que $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$ si y solo si $\nvDash_{\mathfrak{A}} \varphi[s]$. Luego $\vDash_{\mathfrak{A}} \alpha[s]$ si y solo si $\overline{v}(\varphi) = 1$, lo que ocurre si y solo si $\overline{v}(\neg\varphi) = 0$; y como se trata de matrices LPP tenemos que $0 \notin \mathcal{D}$. $\square$

El lema anterior tiene interés por si mismo, dado que presenta de manera clara la relación entre la semántica proposicional (matricial) y la semántica de primer orden. Este lema y los dos siguientes serán útiles para demostrar la corrección de la axiomática que presentaremos para la Lógica de Primer Orden LPP, éstos últimos dos son lemas técnicos.

Lema 3.5. *Sea $\mathfrak{A}$ una estructura para $\mathcal{L}$ y sea s una asignación. Para un término u, sea u^x_t el resultado de reemplazar la variable x en u por el término t. Entonces*

$$s\left(u^x_t\right) = s\left(x|s(t)\right)(u)$$

Observación. Este lema permite observar que se puede substituir en los términos o en la asignación, vemos esto en el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \textit{términos} \arrow[rr, "\textit{susitución}", "\textit{de } x \textit{ por } t"'] \arrow[dr, "s\left(x|s(t)\right)"'] & & \textit{términos} \arrow[dl, "s"] \\ & |\mathfrak{A}| & \end{tikzcd}$$

Demostración. Procedemos por inducción en el término u. Si u es una constante o una variable distinta de x, entonces $u^x_t = u$, además $s\left(x|s(t)\right)(u) = s(u)$. Si $u = x$, entonces $u^x_t = t$, y lo que queremos demostrar se reduce a $s(t) = s(t)$. Si u es $f(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, donde para todo $i \in \{1, n\}$ se tiene $s\left(x|s(t)\right)(\tau_i) = s(\tau_i)$; tenemos entonces que:

$$\begin{aligned} s\left(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)^x_t\right) &= s\left(f\left(\left((\tau_1)^x_t\right), \ldots, \left((\tau_n)^x_t\right)\right)\right) \\ &= f\left(s\left((\tau_1)^x_t\right), \ldots, s\left((\tau_n)^x_t\right)\right) \\ &= f\left(s\left(x|s(t)\right)(\tau_1), \ldots, s\left(x|s(t)\right)(\tau_n)\right) \\ &= s\left(x|s(t)\right)\left(f(\tau_1, \ldots, \tau_n)\right) \end{aligned}$$

Usamos la hip. de inducción para pasar de la segunda la tercera línea, el resto es por definición. $\square$

Definición. Sea α una fírmula, x una variable y t un término. Definiremos α^x_t como el resultado de reemplazar las apariciones de la variable x en α por el término t, cuando x aparece libre. La definción formal es la siguiente:

- Si α es atómica; α^x_t es el resultado de reemplazar todas las apariciones de la variable x en α por el término t.[1]

[1]Evidentemente se puede definir por recursion formalmente en los términos, sin hacer referencia al reemplazo, pero es un tecnicismo innecesario para los propósitos de este documento; lo único relevante de aquella definición recursiva será que podemos asegurar que α^x_t es una fórmula del lenguaje

- ◇ $(\neg\alpha)^x_t = (\neg\alpha^x_t)$
- ◇ $(\alpha \otimes \beta)^x_t = (\alpha^x_t \otimes \beta^x_t)$, para $\otimes$ un conectivo binario.
- ◇ $(\forall y\alpha)^x_t = \begin{cases} \forall y\alpha & \text{, si } x = y \\ \forall y\,(\alpha^x_t) & \text{, si } x \neq y \end{cases}$
- ◇ $(\exists y\alpha)^x_t = \begin{cases} \exists y\alpha & \text{, si } x = y \\ \exists y\,(\alpha^x_t) & \text{, si } x \neq y \end{cases}$

Definición. Sea x una variable, y sea t un término. Definimos la frase "x es substituible por t en α"[2] de la forma siguiente:

i Para α atómica, siempre x es substituible por t

ii x es substituible por t en $(\neg\alpha)$ si y solo si es substituible en α.

iii x es substituible por t en $(\alpha\otimes\beta)$ si y solo si es substituible en α y en β, para cualaquier $\otimes$ conectivo binario.

iv x es substituible por t en $\forall y\alpha$ o en $\exists y\alpha$ si y solo si ocurre alguna (o ambas) de las dos siguientes situaciones:

a) x no aparece libre en $\forall y\alpha$ o en $\exists y\alpha$

b) y no aparece en t y x es substituible por t en α

Lema 3.6. *Sea $\mathfrak{A}$ un $\mathcal{M}$-modelo, s una asignación. Si la variable x es substituíble por el término t en la fórmula φ, entonces*

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi^x_t\,[s] \text{ \textit{si y solo si} } \mathfrak{A} \vDash \varphi\,[s(x|s(t))]$$

Demostración. Usaremos inducción, viendo los casos de acuerdo a la definición anterior.

- ◇ Si φ es atómica:
  - Si φ es $\tau \approx \kappa$, entonces

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \vDash \varphi^x_t\,[s] &\text{ si y solo si } s\left(\tau^x_t\right) = s\left(\kappa^x_t\right) \\ &\text{ si y solo si } s(x|s(t))\,(\tau) = s(x|s(t))\,(\kappa)\text{ , por Lema 3.5} \\ &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash \tau \approx \kappa\,[s(x|s(t))] \end{aligned}$$

[2] En inglés se usa usualmente la expresión "t is subtituitable for x in α", en el sentido de que t puede ser un substituto para x

- Si φ es $R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi_t^x [s] &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash R(\tau_1, \ldots, \tau_n)_t^x [s] \\ &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash R((\tau_1)_t^x, \ldots, (\tau_n)_t^x) [s] \\ &\text{ si y solo si } R(s((\tau_1)_t^x), \ldots, s((\tau_n)_t^x)) \in \mathcal{D} \\ &\text{ si y solo si } R(s(x|s(t))(\tau_1), \ldots, s(x|s(t))(\tau_n)) \in \mathcal{D}, \text{ por Lema 3.5} \\ &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash R(\tau_1, \ldots, \tau_n) [s(x|s(t))]\end{aligned}$$

◇ Si φ es $\neg\alpha$ con α no literal (el caso literal es idéntico al anterior), es inmediato de la definición y de inducción.

◇ Si φ es $\alpha \otimes \beta$ con $\otimes$ conectivo binario, es inmediato de la definición y de inducción.

◇ Si φ es $\forall y\alpha$ (el caso $\exists y\alpha$ es casi idéntico) hay dos razones por las que puede ocurrir que x sea substituíble por t:

- x no aparece libre en φ: en tal caso tenemos por un lado $\varphi_t^x = \varphi$ y por otro lado que s y $s(x|s(t))$ coinciden en las variables libres de φ, luego por el Teorema 3.1 se tiene lo buscado.
- x aparece libre en φ: en tal caso sabemos que $x \neq y$, y no aparece en t y que x es substituible por t en α. En primer lugar observamos que $\varphi_t^x = (\forall y\alpha)_t^x = \forall y\alpha_t^x$; por otro lado, como y no aparece en t, se tiene que para todo $a \in A$:

$$s(t) = s(y|a)(t) \tag{3.1}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi_t^x [s] &\text{ si y solo si para todo } a \in A \text{ se tiene } \mathfrak{A} \vDash \alpha_t^x [s(y|a)] \\ &\text{ si y solo si para todo } a \in A \text{ se tiene } \mathfrak{A} \vDash \alpha [s(y|a)(x|s(y|a)(t))], \text{ por hip. de ind.} \\ &\text{ si y solo si para todo } a \in A \text{ se tiene } \mathfrak{A} \vDash \alpha [s(y|a)(x|s(t))], \text{ por (3.1)} \\ &\text{ si y solo si para todo } a \in A \text{ se tiene } \mathfrak{A} \vDash \alpha [s(x|s(t))(y|a)] \\ &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash \varphi [s(x|s(t))]\end{aligned}$$

□

3.2. Lógica de primer orden para la clase de LPP-Matrices

Si consideramos $\mathbb{M}$ la clase de todas las matrices LPP; y la consecuencia lógica (la semántica) definida anteriormente tenemos un sistema lógico de Primer Orden. Estudiaremos en esta sección algunas propiedades de este sistema; usaremos como referencia los resultados para la lógica clásica como aparecen en [End01].

3.2.1. Axiomatización

Al igual que hicimos antes mostraremos un sistema deductivo y veremos la equivalencia entre la relación de consecuencia de éste y la de la Lógica inducida por la clase de todas las matrices LPP. Definiremos entonces los axiomas (y las substituciones asociadas a cada uno) del sistema que llamaremos Lógica Literal-Paraconsistente-Paracompleta de Primer Orden o FOLPPL [3].

3.2.1.1. Axiomas

Los axiomas serán todas las generalizaciones universales de fórmulas de la forma:

(A1) Tautologías de SLPPL.

(A2) $\forall x \neg^k \varphi(x) \to \neg^k \varphi^x_t$; donde x es substituible por el término t en $\varphi(x)$.

(A3) $\neg^k \varphi^x_t \to \exists x \neg^k \varphi(x)$; donde x es substituible por el término t en $\varphi(x)$.

(A4) $\forall x\, (\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$.

(A5) $\exists x\, (\varphi \vee \psi) \leftrightarrow (\exists x \varphi \vee \exists x \psi)$.

(A6) $\varphi \to \forall x \varphi$, donde x no aparece libre en φ.

(A7) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$ para φ y ψ complejas (en el sentido de Primer Orden).

(A8) $(\exists x \psi) \to (\neg \forall x \neg \psi)$ para ψ compleja (en el sentido de Primer Orden).

(I1) $x \approx x$

(I2) $x \approx y \to (\alpha \to \alpha')$, donde α es atómica o literal, y α' se obtiene de reemplazar por y algunas o todas las apariciones de x en α.

La única regla de inferencia es MP: $\{\varphi \to \psi, \varphi\} \vdash \psi$

El primer grupo requiere una pequeña explicación: entenderemos aquí por tautología de $SLPPL$ una fórmula de primer orden que se obtiene de reemplazar en una tautología de $SLPPL$ cada letra proposicional por una fórmula de primer orden[4]. Llamaremos Λ al conjunto de los axiomas (es decir, los grupos de fórmulas descritos y sus generalizaciones universales). Como tenemos el axioma de negación para fórmulas complejas y el grupo de axiomas (A1) incluye los axiomas de SLPPL; tenemos para las fórmulas complejas [5] de primer orden todos los resultados que teníamos para fórmulas complejas [6] del lenguaje proposicional.

[3] Por las siglas en inglés para First Order Literal Paraconsistent Paracomplete Logic

[4] Debemos notar para poder hacer este reemplazo, que necesitamos al menos tantas letras proposicionales en el lenguaje proposicional como fórmulas de primer orden; hecho que en este caso está garantizado por ser nuestro lenguaje de primer orden numerable, y que tenemos infinitas variables proposicionales.

[5] Complejas en el sentido de Primer Orden

[6] Complejas en el sentido Proposicional

3.2.1.2. Metateoremas

Listaremos algunos pequeños lemas y teoremas que permiten resumir algunas herramientas asociadas al sistema deductivo antes presentado.

Lema 3.7. *Son teoremas de la Lógica de Primer Orden LPP las siguientes fórmulas:*

i) $\forall x\varphi\leftrightarrow\forall x(\varphi\vee\varphi)$

ii) $\forall x\varphi\leftrightarrow\forall x(\varphi\wedge\varphi)$

iii) $\exists x\varphi\leftrightarrow\exists x(\varphi\vee\varphi)$

Demostración. La demostración de los dos primeros es inmediata usando axiomas del tipo (A4) junto con las tautologías $\forall x(\varphi\rightarrow(\varphi\wedge\varphi))$, $\forall x(\varphi\rightarrow(\varphi\vee\varphi))$, $\forall x((\varphi\wedge\varphi)\rightarrow\varphi)$ y $\forall x((\varphi\vee\varphi)\rightarrow\varphi)$. El siguiente punto usa axiomas del tipo (A5) junto con la tautología $\varphi\leftrightarrow(\varphi\vee\varphi)$. □

Definición. Llamaremos función de reemplazo a una función $*: Var_P\rightarrow\mathcal{F}m$; donde Var_p es el conjunto de las variables proposicionales y $\mathcal{F}m$ el conjunto de las fórmulas de primer orden. Evidentemente se puede extender el dominio de esta función de manera recursiva; llamando a esta extensión igualmente $*$.

Definición. Diremos que Γ implica tautológicamente φ si existe una función de reemplazo y un conjunto de fórmulas del lenguaje proposicional $\Sigma\cup\{\sigma\}$ que satisface que $\Sigma^*\subseteq\Gamma$ y $\sigma^*=\varphi$, donde $\Sigma^*=\{\sigma^*:\sigma\in\Sigma\}$; y tal que $\Sigma\vdash_{SLPPL}\sigma$

Teorema 3.8. $\Gamma\vdash\varphi$ *si y solo si* $\Gamma\cup\Lambda$ *implica tautológicamente* φ

Demostración.

- ◇ ($\Rightarrow$). Procedemos por inducción: el caso en que $\varphi\in\Gamma\cup\Lambda$ es trivial; en el caso de que sea obtenido por MP basta con notar que $\{\alpha,\alpha\rightarrow\beta\}$ implica tautológicamente β.

- ◇ ($\Leftarrow$). Si $\Gamma\cup\Lambda$ implica tautológicamente φ, entonces existe un conjunto de fórmulas del lenguaje proposicional $\Sigma\cup L\cup\{\sigma\}$ tal que $\Sigma^*\subseteq\Gamma$, $L^*\subseteq\Lambda$, $\sigma^*=\varphi$ y $\Sigma\cup L\vdash_{SLPPL}\sigma$; luego por compacidad en SLPPL existen los conjuntos finitos $\Sigma'=\{\sigma_1,\dots,\sigma_m\}$ y $L'=\{l_1,\dots,l_n\}$ tales que $\Sigma'\cup L'\vdash_{SLPPL}\sigma$. Sabemos entonces que $\sigma_1\rightarrow\cdots\rightarrow\sigma_m\rightarrow l_1\rightarrow\cdots\rightarrow l_n\rightarrow\sigma$ es una tautología de SLPPL, y por tanto la siguiente fórmula está en Λ por ser del grupo de axiomas A1:

$$\theta=\gamma_1\rightarrow\cdots\rightarrow\gamma_m\rightarrow\lambda_1\rightarrow\cdots\rightarrow\lambda_n\rightarrow\sigma$$

  donde $\gamma_i=\sigma_i^*$ y $\lambda_i=l_i^*$. Luego usamos MP $m+n$ veces y tenemos que $\{\gamma_1,\dots,\gamma_m,\lambda_1,\dots,\lambda_n,\theta\}\vdash\varphi$ con $\{\gamma_1,\dots,\gamma_m,\lambda_1,\dots,\lambda_n,\theta\}\subseteq\Gamma\cup\Lambda$. □

Lema 3.9. *Generalización: Si* $\Sigma\vdash\varphi$ *y* x *es una variable que no aparece en* Σ*, entonces* $\Sigma\vdash\forall x\varphi$

Demostración. Consideremos un Σ fijo y x es una variable que no aparece en Σ; mostraremos que

$$\{\varphi : \Sigma \vdash \forall x\varphi\}$$

es un conjunto cerrado bajo derivabilidad directa y que contiene a los axiomas y a Σ. De este modo tendremos que

$$\{\varphi : \Sigma \vdash \varphi\} \subseteq \{\varphi : \Sigma \vdash \forall x\varphi\}$$

Procedemos, naturalmente, por inducción:

- ◇ φ es un axioma lógico; en tal caso $\forall x\varphi$ también lo es.
- ◇ $\varphi \in \Gamma$; en ese caso x no aparece libre en φ; y por tanto $\varphi\to\forall x\varphi$ es axioma del grupo (A4). Luego usamos MP para φ y $\varphi\to\forall x\varphi$, y obtenemos los buscado.
- ◇ φ se obtiene por MP de φ y $\varphi\to\psi$; en este caso tenemos por hipótesis de inducción que $\Sigma \vdash \forall x\varphi$ y $\Sigma \vdash \forall x\,(\varphi\to\psi)$. Bastará entonces con usar la hipótesis de inducción y MP en el axioma del grupo (A3) para obtener

$$\forall x\,(\varphi\to\psi) \to (\forall x\varphi\to\forall x\psi)$$ □

Lema 3.10. *Regla T: Si se tiene $\Sigma \vdash \alpha_1, \ldots, \Sigma \vdash \alpha_n$ y $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ implica tautológicamente β, entonces $\Sigma \vdash \beta$*

Demostración. Basta con observar que $\sigma := \alpha_1\to\cdots\to\alpha_n\to\beta$ es una tautología; y por tanto $\sigma \in \Lambda$; luego basta con aplicar MP n veces. □

Teorema 3.11. $\Sigma; \psi \vdash \varphi$ *si y solo si* $\Sigma \vdash \psi\to\varphi$

Demostración. De izquierda a derecha no es más que MP. Una demostración sencilla de este teorema (que mostramos a continuación) usa el teorema 3.8, y por tanto, la compacidad de la lógica proposicional. Una demostración alternativa utiliza inducción en el largo de la fórmula, y si bien es más larga, entrega un procedimiento para encontrar de manera efectiva una demostración de $\psi\to\varphi$ a partir de Σ, usando la demostración conocida de φ a partir de $\Sigma; \psi$.

$$\begin{aligned}\Sigma; \psi \vdash \varphi &\text{ si y solo si } (\Sigma; \psi) \cup \Lambda \text{ implican tautológicamente } \varphi\\ &\text{ si y solo si } \Sigma \cup \Lambda \text{ implican tautológicamente } \psi\to\varphi\\ &\text{ si y solo si } \Sigma \vdash \psi\to\varphi\end{aligned}$$ □

Teorema 3.12. *Generalización sobre constantes: Si $\Sigma \vdash \varphi$ y c es una constante que no aparece en Σ, entonces hay una variable y (que no aparece en φ) tal que $\Sigma \vdash \forall y\varphi^c_y$.*

Demostración. Sea $\langle \alpha_0, \ldots, \alpha_n \rangle$ una deducción de φ a partir de Σ (es decir, unsa secuencia de fórmulas $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ donde para todo j con $0 \leq j \leq n$ se tiene que α_j es directamente derivable de $\{\alpha_i : \ 0 \leq i < j\}$ y $\alpha_n = \varphi$). Sea y la primera variable que aparece en ninguno de los α_i. Afirmamos que

$$\left\langle (\alpha_0)_y^c, \ldots, (\alpha_n)_y^c \right\rangle \qquad (\spadesuit)$$

es una deducción de φ_y^c a partir de Σ; bastará para verificar esto con demostrar que cada $(\alpha_k)_y^c$ está en $\Sigma \cup \Lambda$ o se obtiene por MP de fórmulas anteriores a ella. Analizamos la situación por casos:

- Si $\alpha_k \in \Sigma$, entonces c no aparece en α_k y por tanto $(\alpha_k)_y^c = \alpha_k \in \Sigma$

- Si $\alpha_k \in \Lambda$, entonces $(\alpha_k)_y^c$ también es un axioma lógico. Basta para notar ello con hacer una inspección de cada uno de los grupos de axiomas (hay que observar que se satisfacen las condiciones para los grupos de axiomas (A2), (A3) y (A6), todas de verificación trivial).

- Si α_k se obtiene por MP de α_i y $\alpha_j = \alpha_i \rightarrow \alpha_k$, con $j, i < k$, entonces $(\alpha_j)_y^c = \left((\alpha_i)_y^c \rightarrow (\alpha_k)_y^c\right)$; luego $(\alpha_k)_y^c$ se obtiene por MP de $(\alpha_i)_y^c$ y $(\alpha_j)_y^c$.

Sea Γ el subconjunto finito de Σ usado en ($\spadesuit$); entonces como y no aparece en Γ, tenemos por el Teorema de Generalización (Teo. 3.9) $\Gamma \vdash \forall y \varphi_y^c$. Más aún, hay una demostración de $\forall y \varphi_y^c$ donde c no aparece (La demostración que se forma usando la demostración que teníamos de φ_y^c, además de los pasos necesarios para la generalización, que no agregan nuevas constantes). Evidentemente, esta demostración a partir de Γ es tambien una demostración a partir de Σ. $\square$

Lema 3.13. *Si $\Sigma \vdash \varphi_c^x$, donde c es un símbolo de constante que no aparece en Σ ni en φ, entonces*

$$\Sigma \vdash \forall x \varphi$$

Demostración. Por el teorema anterior, tenemos una deducción (donde no aparece c) de $\forall y \left(\varphi_c^x\right)_y^c$, donde y no aparece en φ_c^x. Como c no aparece en φ, se tiene $\left(\varphi_c^x\right)_y^c = \varphi_y^x$
Falta entonces demostrar que $\forall y \varphi_y^x \vdash \forall x \varphi$. Por el teorema de generalización nos bastará con demostrar que $\forall y \varphi_y^x \vdash \varphi$; para ello usaremos que $\forall y \varphi_x^y \rightarrow \varphi$ es un axioma (del grupo de axiomas (A2)). Para verificar este hecho basta con tener que y es substituible por x en φ_y^x y $\left(\varphi_y^x\right)_x^y$ debe ser φ. El primer hecho es de fácil verificación en la definición de substituible, y el segundo requiere una pequeña inducción. $\square$

A continuación algunos corolarios muy relevantes, que permiten asociar los dos cuantificadores a nivel sintáctico sin depender del axioma A8:

Corolario 3.14. $\neg \exists x \varphi \vdash \forall x \neg (\varphi \vee \varphi)$*; más aún, si φ compleja,* $\neg \exists x \varphi \vdash \forall x \neg \varphi$

Demostración. Demostraremos el caso en que φ no es compleja, y será evidente en la demostración el caso en que es compleja. Sabemos que $\vdash \varphi_c^x \rightarrow \exists x\varphi$ por axioma del tipo A3, con c un símbolo de constante cualquiera. En particular podemos tomar c que no aparece en φ; luego, por ser $\exists x\varphi$ una fórmula compleja tenemos (usando lo anterior y la tautología de SLPPL adecuada):

$$\neg\exists x\varphi\neg \vdash (\varphi_c^x \vee \varphi_c^x)$$

Observación. En este punto es donde podemos usar φ en vez de $\varphi\vee\varphi$ cuando φ es compleja.

Por otro lado, como c no aparece en φ, tenemos por Lema 3.13 que

$$\neg(\varphi\vee\varphi)_c^x \vdash \forall x\neg(\varphi\vee\varphi)$$ □

Corolario 3.15. $\neg\forall x\varphi \vdash \exists x\neg(\varphi\vee\varphi)$*; más aún, si* φ *compleja,* $\neg\forall x\varphi \vdash \exists x\neg\varphi$

Demostración. Procedemos primero por contraposición; y luego casi idéntico al corolario anterior. □

Lema 3.16. *Regla EI: Si* $\Sigma, \varphi_c^x \vdash \psi$*, donde* c *es un símbolo de constante que no aparece en* Σ*, en* φ *ni en* ψ*, entonces*

$$\Sigma; \exists x\varphi \vdash \psi$$

Demostración. Si $\Sigma, \varphi_c^x \vdash \psi$; entonces $\Sigma, \neg(\psi\wedge\psi) \vdash \neg(\varphi\wedge\varphi)_c^x$. Por otro lado, por el Lema 3.13 tenemos que como c no aparece en Σ ni en ψ;

$$\Sigma, \neg(\psi\wedge\psi) \vdash \forall x\neg(\varphi\wedge\varphi)$$

Usamos contraposicion y MP para obtener que es equivalente a $\Sigma, \neg\forall x\neg(\varphi\wedge\varphi) \vdash \psi$; usando A8 y MP tenemos que

$$\Sigma, \neg\exists x(\varphi\wedge\varphi) \vdash \psi$$

Basta entonces para finalizar con usar el lema 3.7 □

Teorema 3.17. *Existencia de variantes alfabéticas: Sea* φ *una fórmula,* t *un término y* x *una variable. Entonces podemos encontrar una fórmula* φ' *(que difiere de* φ *solo en la elección de las variables cuantificadas) tal que:*

(a) $\varphi \vdash \varphi'$ *y* $\varphi' \vdash \varphi$ *(por Teo. de Deducción es equivalente a* $\vdash \varphi\leftrightarrow\varphi'$*)*

(b) x *es substituible por* t *en* φ'

Demostración. Sean x y t fijos; construiremos φ' de forma recursiva:

- ◇ Si φ atómica, $\alpha' = \alpha$
- ◇ Si φ es $\neg^k\beta$, $\varphi' = \neg^k\beta'$

◇ Si φ es $\alpha \otimes \beta$, con $\otimes \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$, $\varphi' = \alpha' \otimes \beta'$

◇ Si φ es $\forall y \alpha$ (el caso $\exists y \alpha$ es casi idéntico) tenemos distintos casos:

- Si y no aparece en t, o si $y = x$, entonces podemos tomar $\varphi' = \forall y \alpha'$; y directamente de la definición se tiene que x es substituible por t.
- Si no se da el caso anterior, entonces escogemos una variable z que no aparece en α' ni en t, y que no es x. Entonces definimos $\varphi' = \forall z\, (\alpha')^y_z$. Para verificar (b) basta con notar que z no aparece en t, y por hipótesis de inducción x es substituible por t en α', por tanto x es substituible por t también en $(\alpha')^y_z$ (pues $x \neq z$).

Falta verificar que se cumple (a)

◇ Si φ atómica, $\varphi' = \varphi$, luego es inmediato que $\varphi \vdash \varphi'$ y $\varphi' \vdash \varphi$.

◇ Si φ es $\neg^k \beta$, $\varphi' = \neg^k \beta'$. Cuando β es atómica, tenemos $\varphi' = \varphi$, y por tanto $\varphi \vdash \varphi'$ y $\varphi' \vdash \varphi$. Cuando β es compleja, usamos que conocemos éste resultado para fórmulas complejas del lenguaje proposicional.

◇ Si φ es $\alpha \otimes \beta$, con $\otimes \in \{\rightarrow, \wedge, \vee\}$, $\varphi' = \alpha' \otimes \beta'$; usamos hipótesis de inducción y la tautología de SLPPL:

$$((\alpha \leftrightarrow \alpha') \wedge (\beta \leftrightarrow \beta')) \rightarrow ((\alpha \otimes \beta) \leftrightarrow (\alpha' \otimes \beta'))$$

◇ Si φ es $\forall y \alpha$ tenemos distintos casos, correspondientes a los casos anteriores:

- Si $\varphi' = \forall y \alpha'$, entonces tenemos por hipótesis de inducción $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha'$, por generalización entonces se tiene $\vdash \forall y\, (\alpha \leftrightarrow \alpha')$; y basta con usar el axioma (A4) y MP.
- En este caso tenemos igualmente $\forall y \alpha \vdash \forall y \alpha'$; además sabemos que y es substituible por z en α', pues z no aparece en α', luego, por axioma (A2) y MP se tiene

  $$\forall y \alpha' \vdash (\alpha')^y_z$$

  Luego por teorema de generalización se tiene

  $$\forall y \alpha' \vdash \forall z\, (\alpha')^y_z$$

  Y finalmente por MP de lo expuesto anterioremente tenemos

  $$\varphi \vdash \varphi'$$

  En el otro sentido tenemos:

  $$\forall z\, (\alpha')^y_z \vdash \left((\alpha')^y_z\right)^z_y \text{ que (se puede demostrar) es exactamente } \alpha'$$

Además por hipótesis de inducción se tiene $\alpha' \vdash \alpha$; luego

$$\forall z\,(\alpha')^y_z \vdash \alpha$$

Como y no aparece libre en $(\alpha')^y_z$ a menos que $y = z$ (y en tal caso no aparece libre en $\forall z\,(\alpha')^y_z$), tenemos por generalización:

$$\forall z\,(\alpha')^y_z \vdash \forall y\alpha$$

es decir: $\varphi' \vdash \varphi$ $\square$

◇ Si φ es $\exists y\alpha$ tenemos distintos casos, correspondientes a los casos en la definición de φ':

- Si $\varphi' = \exists y\alpha'$, entonces tenemos por hipótesis de inducción $\vdash \alpha{\leftrightarrow}\alpha'$, además por la Regla EI bastará para demostrar que

  $$\exists y\alpha \vdash \exists y\alpha'$$

  con demostrar que

  $$\alpha^y_c \vdash \exists y\alpha'$$

  con c una constante que no aparece en α ni en α'.

  Sabemos que $\alpha^y_c \vdash (\alpha')^y_c$ (basta con chequear la demostración del Teorema 3.12); luego por axioma A3 y MP tenemos lo buscado. En el otro sentido procedemos de la misma forma.

- Tenemos por hipótesis de inducción $\vdash \alpha{\leftrightarrow}\alpha'$, además por la Regla EI bastará para demostrar que

  $$\exists y\alpha \vdash \exists z\alpha'^y_z$$

  con demostrar que

  $$\alpha^y_c \vdash \exists z\alpha'^y_z$$

  con c una constante que no aparece en α ni en α'. Sabemos que $\alpha^y_c = (\alpha^y_z)^z_c$; luego por hip. de inducción (y la misma observación anterior sobre la demostración del Teorema 3.12) tenemos $\alpha^y_c \vdash ((\alpha')^y_z)^z_c$; luego por axioma A3 y MP tenemos lo buscado.

  En el otro sentido tenemos que basta por Regla EI para demostrar:

  $$\exists z\,(\alpha')^y_z \vdash \exists y\alpha$$

  con demostrar

  $$\left((\alpha')^y_z\right)^z_c \vdash \exists y\alpha$$

  Usamos entonces que $((\alpha')^y_z)^z_c = \alpha'^y_c$, la hipótesis de inducción y la observación antes hecha y tenemos que

  $$\left((\alpha')^y_z\right)^z_c \vdash \alpha^y_c$$

  Finalmente solo hace falta usar axioma A3 y MP para obtener lo buscado.

3.2.2. Completud

Nuestro objetivo es demostrar que $\Gamma \vdash_{\text{FOLPPL}} \varphi$ es equivalente a $\Gamma \vDash_{\text{LPP}} \varphi$; es decir que el sistema deductivo antes definido axiomáticamente es equivalente al definido por la clase de todas las matrices LPP. En primer lugar necesitamos algunas definiciones.

Definición.

- $\diamond$ Un conjunto Σ de fórmulas se dice *no trivial* si existe alguna fórmula que no es deducible a partir de Σ. En otro caso, diremos que es *trivial*.
- $\diamond$ Sea $\mathcal{M} = \langle \mathbb{M}, \mathcal{D}, \sim \rangle$ una matriz-LPP; un conjunto Σ de fórmulas se dice $\mathcal{M}$-*satisfactible* si existe un $\mathcal{M}$-modelo $\mathfrak{A}$ y una asignación s tal que para todo $\sigma \in \Sigma$, se tiene $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \sigma\,[s]$. Diremos simplemente que Σ es *satisfactible* si es $\mathcal{M}$ satisfactible para alguna matriz LPP $\mathcal{M}$.
- $\diamond$ Un conjunto no trivial de fórmulas Σ se dice *maximal* si para cualquier $\vartheta \notin \Sigma$, $\Sigma \cup \{\vartheta\}$ es trivial.
- $\diamond$ Un conjunto de fórmulas Σ se dice *filtro deductivo* si contiene todos los axiomas y es cerrado bajo MP.

Lema 3.18. *Un conjunto de fórmulas Σ es trivial si y solo si existe una fórmula compleja ψ tal que $\Sigma \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$.*

Demostración. De izquierda a derecha es inmediato de la definición; de derecha a izquierda observamos que si se tiene $\Sigma \vdash (\psi \wedge \neg\psi)$, entonces se tiene

$$\Sigma \vdash \neg\neg(\psi \wedge \neg\psi)$$

Y por tanto si α es una fórmula cualquiera del lenguaje, tenemos que

$$\Sigma, \neg(\alpha \wedge \alpha) \vdash \neg\neg(\psi \wedge \neg\psi)$$

Usando el teorema de deducción se tiene $\Sigma \vdash \neg(\alpha \wedge \alpha) \to \neg\neg(\psi \wedge \neg\psi)$, y usando ahora el axioma de negación y MP tenemos $\Sigma \vdash \neg(\psi \wedge \neg\psi) \to \alpha \wedge \alpha$; pero como ψ es compleja, $\Sigma \vdash \neg(\psi \wedge \neg\psi)$; luego tenemos $\Sigma \vdash \alpha \wedge \alpha$, lo que por la tautología $(\alpha \wedge \alpha) \to \alpha$ se traduce en $\Sigma \vdash \alpha$, es decir, Σ trivial. $\square$

Corolario 3.19. *Si Σ es un conjunto maximal (por definición no trivial), y ψ una fórmula compleja, entonces $\psi \in \Sigma$ si y solo si $\neg\psi \notin \Sigma$.*

Demostración. Procedemos por contradicción: supongamos $\psi \in \Sigma$ y $\neg\psi \in \Sigma$; entonces $\Sigma \vdash \psi$ y $\Sigma \vdash \neg\psi$; luego por Regla T se tiene $\Sigma \vdash \psi \wedge \neg\psi$. Por otro lado, si $\neg\psi \notin \Sigma$ y $\psi \notin \Sigma$ entonces $\Sigma \cup \{\neg\psi\}$ y $\Sigma \cup \{\psi\}$ son triviales; lo que implica por Teo de Deducción que $\Sigma \vdash \psi \to \neg\psi$ y $\Sigma \vdash \neg\psi \to \psi$; luego por Regla T se tiene que $\Sigma \vdash \alpha$ para cualquier α; es decir, se contradice la no trivialidad. $\square$

Lema 3.20. *Si Σ es un conjunto maximal de fórmulas, entonces es un filtro deductivo.*

Demostración. Idéntica al lema equivalente para la lógica proposicional (Lema 2.13) □

Lema 3.21. *Sea Σ un conjunto no trivial de fórmulas en el lenguaje $\mathcal{L}$; y sea $\mathcal{L}'$ el lenguaje que se obtiene de agregar una cantidad infinita (numerable) de nuevas constantes a $\mathcal{L}$; entonces Σ es no trivial en el lenguaje $\mathcal{L}'$.*

Demostración. Si Σ es trivial en $\mathcal{L}'$, existe una deducción en éste lenguaje de $\psi\wedge\neg\psi$, para una fórmula compleja ψ; lo que implica que existe una deducción de ψ y de $\neg\psi$ a partir de Σ. Esta deducción, al ser finita, contiene una cantidad finita de símbolos de constante que no estaban en $\mathcal{L}$. Por el Teorema 3.12 tenemos que podemos reemplazar cada una de esas constantes por una variable (agregando un $\forall y_i$ al inicio cada vez); de modo que en el lenguaje original tenemos $\Sigma \vdash \psi'$ y $\Sigma \vdash \neg\psi'$; con ψ' compleja, de modo que Σ sería inconsistente en $\mathcal{L}$. □

Teorema 3.22. *Todo conjunto no trivial de fórmulas Σ es $\mathcal{M}$-satisfactible para alguna matriz LPP $\mathcal{M}$ (más aún, tiene un $\mathcal{M}$-modelo numerable, con $\mathcal{M}$ también numerable).*

Demostración. En primer lugar extendemos el lenguaje $\mathcal{L}$ de Σ a $\mathcal{L}'$, adjuntando una cantidad infinita de nuevos símbolos de constante. Por el Lema 3.21 sabemos que en $\mathcal{L}'$, Σ permanece no trivial. Consideremos una numeración fija de todos los pares de la forma $\langle\varphi, x\rangle$, donde φ es una fórmula de $\mathcal{L}'$ y x una variable:

$$\langle\varphi_1, x_1\rangle, \langle\varphi_2, x_2\rangle, \langle\varphi_3, x_3\rangle, \ldots$$

Definimos inductivamente las fórmulas α_i de la siguiente forma:

$$\alpha_i = \neg\forall x_i\varphi_i \to \neg\left((\varphi_i)^{x_i}_{c_i} \wedge (\varphi_i)^{x_i}_{c_i}\right)$$

donde c_i es la primera de las nuevas constantes que no aparece en φ_i ni en los α_j con $j < i$. Sea $\Psi = \{\alpha_i : i \in \omega\}$; afirmamos que $\Sigma \cup \Gamma$ es no trivial. Si fuera trivial, entonces para algún k se tiene

$$\Sigma \cup \Gamma_k \vdash \bot$$

donde $\Gamma_k = \{\alpha_i : 1 \leq i \leq k\}$, y $\bot$ es una contradicción fuerte, es decir, una fórmula de la forma $\psi\wedge\neg\psi$ con ψ compleja. Asumimos que k es el menor de los números naturales que satisface esta propiedad; sabemos que $k > 0$ porque Σ es no trivial. Como tanto α_k como $\bot$ son complejas, podemos usar contrareciproco; luego

$$\Sigma; \neg\bot; \Gamma_{k-1} \vdash \neg\alpha_k$$

Además sabemos que $\vdash \neg\bot$, luego se tiene

$$\Sigma; \Gamma_{k-1} \vdash \neg\alpha_k$$

es decir, usando la tautología adecuada y MP:

$$\begin{aligned} \Sigma; \neg\bot; \Gamma_{k-1} &\vdash \neg\forall x_k\varphi_k \\ \Sigma; \neg\bot; \Gamma_{k-1} &\vdash (\varphi_k)^{x_k}_{c_k} \wedge (\varphi_k)^{x_k}_{c_k} \end{aligned}$$

De la segunda de ellas tenemos

$$\Sigma; \Gamma_{k-1} \vdash (\varphi_k)^{x_k}_{c_k}$$

Pero como c_k no aparece en $\Sigma \cup \Gamma_{k-1}$, por Lema 3.12 se tiene:

$$\Sigma; \Gamma_{k-1} \vdash \forall x_k \varphi_k$$

Es decir, $\Sigma \cup \Gamma_{k-1}$ es trivial, lo que contradice la minimalidad de k.

Consideremos ahora una numeración de las fórmulas de $\mathcal{L}'$: $\{\beta_i\}_{i\in\omega}$. Extendemos $\Sigma_0 = \Sigma \cup \Gamma$ de manera recursiva, a un conjunto maximal de fórmulas, de la forma siguiente:

$$\Sigma_{i+1} = \begin{cases} \Sigma_i \cup \{\beta_i\} & \text{, si este conjunto no es trivial} \\ \Sigma_i & \text{, en otro caso} \end{cases}$$
$$\overline{\Sigma} = \bigcup_{i\in\omega} \Sigma_i$$

Como las deducciones son finitas, si $\overline{\Sigma}$ fuera trivial, al menos un Σ_i lo sería también, pero por construcción cada uno de ellos es no trivial. También por construcción tenemos que $\overline{\Sigma}$ es maximal, luego por 3.20 es cerrado bajo deducciones.

Siguiendo la idea usada en la lógica proposicional necesitamos construir, pensando en $\overline{\Sigma}$, una matriz $\mathcal{M}$ adecuada para poder contruir luego (con algunos ajustes) un $\mathcal{M}$-modelo de $\overline{\Sigma}$. Consideremos entonces la matriz LPP $\mathcal{M} = \langle M, \mathcal{D}, \sim \rangle$:

$$M = \{\varphi : \varphi \text{ es una fórmula literal de } \mathcal{L}'\} \cup \{0, 1\}$$
$$\mathcal{D} = \left\{\psi \in M : \psi \in \overline{\Sigma} \cup \{1\}\right\}$$
$$\sim a = \begin{cases} 0 & \text{, si } a = 1 \\ 1 & \text{, si } a = 0 \\ \neg a & \text{, en otro caso} \end{cases}$$

Ahora consideremos el $\mathcal{M}$-modelo

$$\mathfrak{A} = \left\langle A, \hat{R}_i, \hat{E}, \hat{f}_j, \hat{c_k} \right\rangle_{i\in I, j\in J, k\in K}$$

donde E es un nuevo símbolo de predicado binario que reemplazará la igualdad si es que está en el lenguaje; en caso de no estar, puede ser omitida (llamaremos al lenguaje con este nuevo símbolo $\mathcal{L}''$, en cualquier caso sabemos que contiene los mismos términos que $\mathcal{L}'$). Se define $\mathfrak{A}$ de la siguiente forma:

$$A = \{\tau : \tau \text{ es un término de } \mathcal{L}'\}$$
$$\hat{R}_i(\hat{\tau}_1, \ldots, \hat{\tau}_n) = R_i(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$
$$\hat{f}_j(\hat{\tau}_1, \ldots, \hat{\tau}_n) = f_j(\tau_1, \ldots, \tau_n)$$
$$\hat{c_k} = c_k$$
$$\hat{E}(\hat{\tau}_1, \hat{\tau}_2) = \begin{cases} 1 & \text{, si } \tau_1 \approx \tau_2 \in \overline{\Sigma} \\ 0 & \text{, si } \neg\tau_1 \approx \tau_2 \in \overline{\Sigma} \end{cases}$$

Quisieramos que $\mathfrak{A}$ fuera un $\mathcal{M}$-modelo de $\overline{\Sigma}$, sin embargo hace falta hacer un pequeño ajuste cuando aparece la identidad. Consideremos la asignación $s : Var \to A$ tal que $s(x) = x$ para toda variable x, es decir, aquella que es la identidad sobre las variables; se tiene por tanto que es la identidad sobre los términos, i.e. $s(\tau) = \tau$ para todo término de $\mathcal{L}'$ (se puede demostrar fácilmente por inducción). Para una fórmula φ de $\mathcal{L}'$, sea φ^* el resultado de reemplazar el símbolo de igualdad $\approx$ por E en φ. Afirmamos que

$$\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \varphi^* [s] \text{ si y solo si } \varphi \in \overline{\Sigma}$$

Para demostrar este hecho usamos, evidentemente, inducción en el largo de la fórmula.

◇ Si φ es de la forma $\tau_1 \approx \tau_2$, $\varphi^* = E(\tau_1, \tau_2)$ y tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi^*[s] &\text{ si y solo si } \hat{E}\left(s(\tau_1), s(\tau_2)\right) \in \mathcal{D}\\ &\text{ si y solo si } \hat{E}\left(\tau_1, \tau_2\right) \in \mathcal{D}\\ &\text{ si y solo si } \hat{E}\left(\tau_1, \tau_2\right) = 1\\ &\text{ si y solo si } \tau_1 \approx \tau_2 \in \overline{\Sigma}\end{aligned}$$

◇ Si φ es de la forma $\neg^k R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$; $\varphi^* = \varphi$ y tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi^*[s] &\text{ si y solo si } \sim^k \hat{R}_i\left(s(\tau_1), \ldots, s(\tau_n)\right) \in \mathcal{D}\\ &\text{ si y solo si } \sim^k \hat{R}_i\left(\tau_1, \ldots, \tau_n\right) \in \mathcal{D}\\ &\text{ si y solo si } \neg^k R_i\left(\tau_1, \ldots, \tau_n\right) \in \overline{\Sigma}\end{aligned}$$

◇ Si φ es de la forma $\neg\psi$ con ψ compleja, entonces tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi^*[s] &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \nvDash \psi^*[s]\\ &\text{ si y solo si } \psi \notin \overline{\Sigma} \text{ por hipótesis de inducción}\\ &\text{ si y solo si } \neg\psi \in \overline{\Sigma} \text{ por 3.19}\\ &\text{ si y solo si } \varphi \in \overline{\Sigma}\end{aligned}$$

◇ Si φ es de la forma $\psi \to \vartheta$, $\varphi^* = \psi^* \to \vartheta^*$, y tenemos

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash \varphi^*[s] &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash \psi^* \to \vartheta^*[s]\\ &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash \vartheta^*[s] \text{ y/o } \mathfrak{A} \nvDash \psi^*[s]\\ &\text{ si y solo si } \vartheta \in \overline{\Sigma} \text{ y/o } \psi \notin \overline{\Sigma} \text{ por hipótesis de inducción}\\ &\text{ si y solo si } \vartheta \in \overline{\Sigma} \text{ y/o } (\psi \wedge \psi) \notin \overline{\Sigma}\\ &\text{ si y solo si } (\vartheta \wedge \vartheta) \in \overline{\Sigma} \text{ y/o } \neg(\psi \wedge \psi) \in \overline{\Sigma}\\ &\text{ si y solo si } \psi \to \vartheta \in \overline{\Sigma} \text{ pues si no fuera así, estaría la negación,}\\ &\qquad\qquad \text{contradiciendo no trivialidad}\\ &\text{ si y solo si } \varphi \in \overline{\Sigma}\end{aligned}$$

- $\diamond$ Si φ es de la forma $\psi\vee\vartheta$ o $\psi\wedge\vartheta$ se trata similar al caso anterior.

- $\diamond$ Si φ es de la forma $\forall x\psi$, $\varphi^* = (\forall x\psi)^* = \forall x\,(\psi^*)$. Sabemos que $\overline{\Sigma}$ contiene la fórmula

$$\vartheta = \neg\forall x\psi\rightarrow\neg\,(\psi\wedge\psi)_c^x$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}\models\varphi^*[s] &\Rightarrow \mathfrak{A}\models\psi^*[s(x|c)]\\
&\Rightarrow \mathfrak{A}\models(\psi^*)_c^x\,[s] \text{ por el lema de substitución}\\
&\Rightarrow \mathfrak{A}\models(\psi_c^x)^*\,[s]\\
&\Rightarrow \psi_c^x\in\overline{\Sigma} \text{ por hipótesis de inducción}\\
&\Rightarrow \psi_c^x\wedge\psi_c^x\in\overline{\Sigma}\\
&\Rightarrow \neg\,(\psi\wedge\psi)_c^x\notin\overline{\Sigma}\\
&\Rightarrow \neg\forall x\psi\notin\overline{\Sigma}\\
&\Rightarrow \forall x\psi\in\overline{\Sigma}
\end{aligned}$$

En el otro sentido tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}\not\models\varphi^*[s] &\Rightarrow \mathfrak{A}\not\models\psi^*[s(x|t)] \text{ para algún término t}\\
&\Rightarrow \mathfrak{A}\not\models\rho^*[s(x|t)] \text{ donde } \rho \text{ es variable alfabética de } \psi \text{ en la cual}\\
&\qquad\qquad x \text{ es substituíble por } t\\
&\Rightarrow \mathfrak{A}\not\models(\rho^*)_t^x\,[s] \text{ por el lema de substitución: Lemma 3.6}\\
&\Rightarrow \mathfrak{A}\not\models(\rho_t^x)^*\,[s]\\
&\Rightarrow \rho_t^x\notin\overline{\Sigma} \text{ por hipótesis de inducción}\\
&\Rightarrow \forall x\rho\notin\overline{\Sigma} \text{ por ser } \overline{\Sigma} \text{ cerrado deductivamente}\\
&\Rightarrow \forall x\psi\notin\overline{\Sigma}
\end{aligned}$$

- $\diamond$ Si φ es de la forma $\exists x\psi$ se utiliza el caso anterior, usando la relación semántica entre los cuantificadores. Sabemos que $\overline{\Sigma}$ contiene la fórmula

$$\vartheta = \neg\forall x\neg\,(\psi\wedge\psi)\rightarrow\neg\,(\neg\,(\psi\wedge\psi)\wedge\neg\,(\psi\wedge\psi))_c^x$$

Tenemos entonces:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}\models\varphi^*[s] &\Rightarrow \mathfrak{A}\not\models\forall x\neg\,(\psi\wedge\psi)^*\\
&\Rightarrow \forall x\neg\,(\psi\wedge\psi)\notin\overline{\Sigma}\\
&\Rightarrow \neg\forall x\neg\,(\psi\wedge\psi)\in\overline{\Sigma}\\
&\Rightarrow \neg\,(\neg\,(\psi\wedge\psi)_c^x)\in\overline{\Sigma}\\
&\Rightarrow (\psi\wedge\psi)_c^x\in\overline{\Sigma}\\
&\Rightarrow \psi_c^x\in\overline{\Sigma}\\
&\Rightarrow \exists x\psi\in\overline{\Sigma} \text{ por axioma A3}
\end{aligned}$$

En el otro sentido tenemos:

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \nvDash \varphi^*[s] &\Rightarrow \mathfrak{A} \vDash \forall x \neg (\psi \wedge \psi)^* \\ &\Rightarrow \forall x \neg (\psi \wedge \psi) \in \overline{\Sigma} \\ &\Rightarrow \neg \exists x \varphi \in \overline{\Sigma} \text{ por axioma A8} \\ &\Rightarrow \exists x \varphi \notin \overline{\Sigma}\end{aligned}$$

Concluimos asi la demostración de

$$\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \varphi^* [s] \text{ si y solo si } \varphi \in \overline{\Sigma}$$

Si nuestro lenguaje no tenía el símbolo de igualdad, la demostración termina aquí y obtenemos que $\mathfrak{A}$ es un $\mathcal{M}$ modelo de $\overline{\Sigma}$; si lo incluía, entonces debemos considerar la estructura cuociente $\mathfrak{A}/E$; usando que gracias a los axiomas de igualdad, E es una congruencia en $\mathfrak{A}$; es decir, una relación de equivalencia compatible con funciones y relaciones.

Finalmente basta con restringir $\mathfrak{A}/E$ al lenguaje $\mathcal{L}$ y se tiene que si h es el mapeo natural de $\mathfrak{A}$ en $\mathfrak{A}/E$; entonces $\varphi \in \overline{\Sigma} \Leftrightarrow \mathfrak{A}/E \vDash \varphi [h \circ s]$ □

Teorema 3.23. *Completud: Si* $\Gamma \vDash_{LPP} \varphi$*, entonces* $\Gamma \vdash_{FOLPPL} \varphi$

Demostración. Procederemos por contradicción. Supongamos $\Gamma \vDash_{\text{LPP}} \varphi$ y $\Gamma \nvdash_{\text{FOLPPL}} \varphi$; entonces $\Gamma \cup \{\neg (\varphi \wedge \varphi)\}$ es no trivial, pues si lo fuera, tendríamos:

$$\begin{aligned}\Gamma \cup \{\neg (\varphi \wedge \varphi)\} &\vdash \bot \\ \Gamma &\vdash \neg (\varphi \wedge \varphi) \to \bot \\ \Gamma &\vdash \neg \bot \to (\varphi \wedge \varphi) \\ \Gamma &\vdash \varphi \wedge \varphi \\ \Gamma &\vdash \varphi\end{aligned}$$

Luego, como Γ es no trivial, Γ es satisfactible, es decir, existe un modelo $\mathfrak{A}$ y una asignación s tal que $\mathfrak{A} \vDash \neg (\varphi \wedge \varphi) [s]$ y $\mathfrak{A} \vDash \gamma[s]$, para todo $\gamma \in \Gamma$; pero como $\Gamma \vDash_{\text{LPP}} \varphi$; entonces todo modelo de Γ es modelo de φ; es decir, $\mathfrak{A} \vDash \varphi[s]$; y por tanto $\mathfrak{A} \vDash \varphi \wedge \varphi[s]$; contradiciendo que $\mathfrak{A} \vDash \neg (\varphi \wedge \varphi) [s]$; y por tanto, contradiciendo la suposición de $\Gamma \nvdash_{\text{FOLPPL}} \varphi$ □

3.2.3. Corrección

Nuestro objetivo es demostrar la corrección del cálculo deductivo para la lógica de primer orden para LPP-matrices propuesto en la sección anterior, es decir: Si $\Gamma \vdash \varphi$, entonces $\Gamma \vDash \varphi$.

La idea es demostrar que los axiomas son verdaderos, ya que sabemos que MP preserva las implicaciones lógicas.

Lema 3.24. *Los axiomas lógicos son válidos.*

Demostración. Revisaremos los axiomas, sabiendo que toda generalización de una fórmula válida es válida; es decir, basta con revisar aquellos axiomas que no son generalización de otros axiomas. En este demostración tendremos $\mathcal{M} = (M, \mathcal{D}, \sim)$ una matriz LPP, $\mathfrak{A}$ un $\mathcal{M}$-modelo y s una asignación $s : V \to A$

i) Grupo de Axiomas 1:

Consideremos una tautología de la logica proposicional LPP, es decir, φ tal que $\vdash_{LPP} \varphi$. Debemos demostrar que en la lógica de primer orden para LPP $\vDash_{LPP} \varphi'$, donde φ' se obtiene de reemplazar en φ las letras proposicionales por fórmulas bien formadas del lenguaje de primer orden para LPP. Tenemos que $\vdash_{LPP} \varphi$ si y solo si para toda matriz LPP $\mathcal{M}$, y valuación $v : Var \to M$ se tiene $\varphi^v \in \mathcal{D}$. Usamos entonces el Lema 3.4, que precisamente relacionaba ambas semánticas, y concluimos directamente.

ii) Grupo de Axiomas 2:

Supongamos $\mathfrak{A} \vDash \forall x \neg^k \varphi[s]$ (si no ocurre esto, el axioma es trivialmente válido), entonces para todo $a \in |\mathfrak{A}|$ se tiene

$$\mathfrak{A} \vDash \neg^k \varphi \left[s \left(x | a \right) \right]$$

Podemos tomar el caso particular $a = s(t)$; entonces tenemos

$$\mathfrak{A} \vDash \neg^k \varphi \left[s \left(x | s(t) \right) \right]$$

que por el lema de substitución (Lema 3.6), cuando x es susbtituíble por t es equivalente a

$$\mathfrak{A} \vDash \neg^k \varphi_t^x \left[s \right]$$

Luego tenemos que si $\mathfrak{A} \vDash \forall x \neg^k \varphi[s]$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \neg^k \varphi_t^x \left[s \right]$; presisamente lo que buscábamos.

iii) Grupo de Axiomas 3:

Supongamos $\mathfrak{A} \vDash \neg^k \varphi_t^x \left[s \right]$ (si no ocurre esto, el axioma es trivialmente válido), que por el lema de substitución (Lema 3.6), cuando x es susbtituíble por t es equivalente a

$$\mathfrak{A} \vDash \neg^k \varphi \left[s \left(x | s(t) \right) \right]$$

Luego existe un a (específicamente $a = s(t)$) tal que

$$\mathfrak{A} \vDash \neg^k \varphi \left[s \left(x | a \right) \right]$$

Y por tanto se tiene

$$\mathfrak{A} \vDash \exists x \neg^k \varphi[s]$$

Finalmente, concluímos que si $\mathfrak{A} \vDash \neg^k \varphi_t^x \left[s \right]$, entonces $\mathfrak{A} \vDash \exists x \neg^k \varphi[s]$; y por tanto el axioma es válido.

iv) Grupo de Axiomas 4:

Procederemos por contradicción: tendremos que no ocurre

$$\models \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x\varphi \to \forall x\psi)$$

si existe una asignación s tal que se tiene

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \forall x(\varphi \to \psi)[s] \text{ y}$$
$$\mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{M}} (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[s]$$

Pero si $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \forall x(\varphi \to \psi)[s]$ entonces

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} (\varphi \to \psi)[s(x|a)] \text{ para todo } a \in A \tag{3.2}$$

por otro lado si $\mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{M}} (\forall x\varphi \to \forall x\psi)[s]$, entonces

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \forall x\varphi[s] \text{ y} \tag{3.3}$$
$$\mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{M}} \forall x\psi[s] \tag{3.4}$$

De (3.3) y (3.2) tenemos que

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \forall x\psi[s]$$

justamente contrario a lo que indica (3.4); concluímos así que el axioma es válido.

v) Grupo de Axiomas 5:

Usando definición de satisfacción tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \exists x\,(\varphi\vee\psi)\,[s] &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} (\varphi\vee\psi)[s(x|a)], \text{ para algún } a \in A\\
&\text{ si y solo si para algún } a \in A \text{ se tiene } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \varphi[s(x|a)] \text{ o } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \psi[s(x|a)]\\
&\text{ si y solo si para algún } a \in A \text{ se tiene } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \varphi[s(x|a)]\\
&\qquad\qquad \text{ y/o para algún } b \in A \text{ se tiene } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \psi[s(x|b)]\\
&\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \exists x\varphi\,[s] \text{ y/o } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \exists x\psi\,[s]\\
&\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} (\exists x\varphi\vee\exists x\psi)\,[s]
\end{aligned}$$

Luego, usando la definiciíon de $\mathfrak{A} \vdash_{\mathcal{M}} \alpha\to\beta$, tenemos que $\mathfrak{A} \models \exists x\,(\varphi\vee\psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi\vee\exists x\psi)$ para cualquier matriz LPP $\mathcal{M}$, cualquier $\mathcal{M}$-modelo $\mathfrak{A}$.

vi) Grupo de Axiomas 6:

Si x no aparece libre en φ, entonces s y $s[x|a]$ coinciden en las variables libres de φ para cualquier $a \in A$, luego tenemos que

$$\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \varphi[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \varphi[s(x|a)]$$

Así, tenemos que si $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \varphi[s(x|a_0)]$ para algún $a_0 \in A$, entonces $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \varphi[s]$ y $\mathfrak{A} \models_{\mathcal{M}} \varphi[s(x|a)]$ para cualquier $a \in A$; del mismo modo si $\mathfrak{A} \not\models_{\mathcal{M}} \varphi[s(x|a_0)]$ para algún $a_0 \in A$, entonces $\mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi[s]$ y $\mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi[s(x|a)]$ para cualquier $a \in A$. Por tanto tenemos que $\mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi[s]$ si y solo si $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \varphi[s(x|a)]$ para cualquier $a \in A$; lo que nos lleva a concluir que si x aparece libre en φ, entonces para cualquier asignación s:

$$\mathfrak{A} \vDash \varphi \leftrightarrow \forall x \varphi[s]$$

Luego

$$\vDash \varphi \to \forall x \varphi$$

vii) Grupo de Axiomas 7:

Sabemos que para una fórmula compleja φ se tiene $\mathfrak{A} \vdash \neg\varphi$ si y solo si $\mathfrak{A} \nvdash \varphi$. Tenemos entonces:

$$\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)\,[s] \text{ si y solo si } \mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} (\neg\varphi \to \neg\psi)\,[s] \text{ o } \mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} (\psi \to \varphi)\,[s] \tag{3.5}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned} \mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} (\neg\varphi \to \neg\psi)\,[s] &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} \neg\psi[s] \text{ y } \mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \neg\varphi[s] \\ &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \psi[s] \text{ y } \mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi[s] \qquad (3.6) \\ \mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} (\psi \to \varphi) &\text{ si y solo si } \mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} \psi[s] \text{ y/o } \mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \varphi[s] \qquad (3.7) \end{aligned}$$

Revisamos entonces los distintos casos posibles: Si $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \varphi[s]$ y/o $\mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} \psi[s]$; entonces por (3.7) $\mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} (\psi \to \varphi)$ y por tanto, por (3.5) se tiene $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)\,[s]$; si no es ninguno de estos casos, entonces $\mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} \varphi[s]$ y $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \psi[s]$; luego tenemos por (3.6) que $\mathfrak{A} \nvDash_{\mathcal{M}} (\neg\varphi \to \neg\psi)\,[s]$ y por (3.5) se tiene $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} (\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)\,[s]$. Como la matriz, el modelo y la asignación son arbitrarios, tenemos que el axioma es válido.

viii) Grupo de Axiomas 8:

Solo requiere chequear la definición de satisfacción

ix) Grupo de Axiomas I1:

Es trivial de la definición

x) Grupo de Axiomas I2:

Si $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} x \approx y[s]$, entonces $s(x) = s(y)$. Consideremos entonces un término t' que se obtiene de reeamplazar alguna, todas o ninguna de las apariciones de x en t, por y; entonces $s(t) = s(t')$ (omitiremos la demostración de este hecho: es muy sencilla y se realiza por inducción.) Demostraremos que si $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} x \approx y[s]$ y $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \alpha[s]$ entonces $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \alpha'[s]$, donde α' se obtiene de reemplazar por y algunas o todas las de x en α

- ◇ Si α es $\tau_1 \approx \tau_2$; $\alpha' = \tau_1' \approx \tau_2'$; y en tal caso $s(\tau_1') = s(\tau_1)$ y $s(\tau_2') = s(\tau_2)$.

◇ Si α es $\neg^k R(\tau_1, \ldots, \tau_n)$, $\alpha' = \neg^k R(\tau'_1, \ldots, \tau'_n)$, entonces

$$\begin{aligned}\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \alpha[s] \text{ si y solo si } & \sim^k R^{\mathfrak{A}}(s(\tau_1), \ldots, s(\tau_n)) \in \mathcal{D} \\ \text{si y solo si } & \sim^k R^{\mathfrak{A}}(s(\tau'_1), \ldots, s(\tau'_n)) \in \mathcal{D} \\ \text{si y solo si } & \mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \alpha'[s]\end{aligned}$$

Tenemos que si $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} x \approx y[s]$ y $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \alpha[s]$, entonces $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} \alpha'[s]$, de lo que podemos concluir que $\mathfrak{A} \vDash_{\mathcal{M}} x \approx y \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha')$. □

Teorema 3.25. *Compacidad: Si $\Gamma \vDash_{LPP} \varphi$, entonces existe un conjunto finito Γ' tal que $\Gamma' \subseteq \Gamma$ y $\Gamma' \vDash_{LPP} \varphi$.*

Demostración. Si $\Gamma \vDash_{LPP} \varphi$, entonces $\Gamma \vdash_{FOLPPL} \varphi$ (Completud); y por tanto existe un conjunto finito Γ' tal que $\Gamma' \subseteq \Gamma$ y $\Gamma' \vdash_{FOLPPL} \varphi$; luego para el mismo Γ' tenemos $\Gamma' \vDash_{LPP} \varphi$ (Corrección) □

Teorema 3.26. *Si un conjunto Σ tiene modelos finitos arbitrariamente grandes, entonces tiene un modelo infinito.*

Demostración. Para cada entero $k \geq 2$ hay una oración γ_k que se traduce como “Hay al menos k elementos distintos”, por ejemplo:

$$\gamma_2 = \exists v_1 \exists v_2 v_1 \not\approx v_2$$
$$\gamma_3 = \exists v_1 \exists v_2 \exists v_3 \, (v_1 \not\approx v_2 \wedge v_1 \not\approx v_2 \wedge v_2 \not\approx v_3)$$

Consideremos el conjunto $\Gamma \cup \{\gamma_i : i \in \omega,\ i \geq 2\}$. Por hipótesis cada subconjunto finito tiene un modelo, luego por compacidad el conjunto entero tiene un modelo; que evidentemente gracias sl conjunto $\{\gamma_i : i \in \omega,\ i \geq 2\}$ es infinito. □

CAPÍTULO 4

Conclusiones

El estudio de las lógicas propocicionales presentado en éste trabajo deja fuera el ámbito de la algebrización. Ésta area fue explorada por Eduardo Hirsh en su tesis doctoral, los resultados dieron lugar a una publicación [HL08]; donde se da cuenta de que son todas lógicas algebrizables en el sentido de Blok y Pigozzi; además de presentar análisis de las algebras asociadas, incluyendo condiciones bajo las cuales son finitamente algebrizables. Por tanto, a primera vista el análisis de la versión proposicional de las lógicas inducidas por matrices LPP parece concluído; sin perjuicio de lo cual es posible que se trabajen aplicaciones, principalmente vinculadas a computación.

Por otro lado, el ámbito de las lógicas de primer orden está aun muy poco explorado, falta en ese sentido trabajar con casos particulares, es decir, tomando algunas matrices fáciles de manejar como las usadas en el caso proposicional, básicamente encontrando una buena axiomatización para ellas. Luego, hace falta hacer un estudio desde el punto de vista de la teoría de modelos. En ésta línea es particularmente importante revisar que la lógica de primer orden para la clase de todas las matrices LPP es escencialmente distinta de la lógica de primer orden clásica, para ello hay que buscar un método quizá apoyado en las existentes caracterizaciones de la lógica clásica del estilo del teorema de Lindström. Luego hay que revisar teoremas de teoría de modelos para la lógica clásica, como el de Omisión de Tipos, Lowenheim-Skolem descendente, Interpolación de Craig, Teorema de Beth sobre definibilidad, etc.

Anexo

Completitud del sistema de conectivos

Llamemos $a_{\mathcal{D}}$ a la fórmula $(a \to a) \to a$. Notamos que $a_{\mathcal{D}}$ toma los valores 0 y 1 cuando $a \in \mathcal{D}$ y $a \notin \mathcal{D}$ respectivamente. Como $a_{\mathcal{D}}$ es una fórmula compleja, se comporta de forma clásica; en este sentido es facil observar que podemos usar nuestro conocimiento de lógica clásica para mostrar que efectivamente el sistema de conctivos $\{\neg, \to\}$ es completo. La defінción de los conectivos $\{\wedge, \vee\}$ es la siguiente:

$$a \wedge b = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in \mathcal{D} \text{ y } b \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a \vee b = \begin{cases} 1, & \text{si } a \in \mathcal{D} \text{ o } b \in \mathcal{D} \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos, considerando la observación (2.6),

$$a \wedge b = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{\mathcal{D}} = 1 \text{ y } b_{\mathcal{D}} = 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a \vee b = \begin{cases} 1, & \text{si } a_{\mathcal{D}} = 1 \text{ o } b_{\mathcal{D}} = 1 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Usando la defінción de los operadores tenemos entonces la siguiente eqivalencia:

$$a \wedge b = a_{\mathcal{D}} \wedge b_{\mathcal{D}}$$
$$a \vee b = a_{\mathcal{D}} \vee b_{\mathcal{D}}$$

por lo tanto, y usando que $a_{\mathcal{D}}$ y $b_{\mathcal{D}}$ son fórmulas complejas, junto a las identidades básicas en lógica clásica tenemos:

$$a \wedge b = \neg(a_{\mathcal{D}} \to \neg b_{\mathcal{D}})$$
$$a \vee b = \neg a_{\mathcal{D}} \to b_{\mathcal{D}}$$

Es facil notar de estas últimas identidades que los pares $\{\neg, \wedge\}$ y $\{\neg, \vee\}$ son tambien un sistema completo de conectivos. Por otro lado, al igual que ocurre con la lógica clásica la negación es imprescindible, pues si $a, b \in \mathcal{D}$; para cualquier fórmula compleja de dos variables φ que no contiene símbolo de negación se tiene $\varphi(a, b) = 1$; y $\phi(p, q) = \neg(p \wedge p)$ satisface $\phi(a, b) = 0$.

Bibliografía

[BJ06] W. J. Blok y B. Jónsson. «Equivalence of consequence operations». En: *Studia Logica* 83.1-3 (2006), págs. 91-110.

[BP89] W. J. Blok y D. Pigozzi. «Algebraizable logics». En: *Memoirs of the American Mathematical Society* 77.396 (1989).

[CK90] C. C. Chang y H. J. Keisler. *Model theory*. 3.ª ed. Dover Publications, 1990.

[Cal+03a] C. Caleiro, W. Carnielli, M. E. Coniglio y J. Marcos. *Dyadic semantics for many-valued logics*. `http://www.cs.math.ist.utl.pt/ftp/pub/CaleiroC/03-CCCMdyadic1.pdf`. 2003 (ver pp. 2, 22).

[Cal+03b] C. Caleiro, W. Carnielli, M. E. Coniglio y J. Marcos. *Suszko's Thesis and dyadic semantics*. `http://www.cs.math.ist.utl.pt/ftp/pub/CaleiroC/03-CCCM-dyadic1.pdf`. 2003 (ver pp. 2, 22).

[Car+01] W. Carnielli, Walter A. y J. Marcos. «A taxonomy of C-systems». En: *arXiv preprint math/0108036* (2001) (ver pp. 48, 55).

[DC+96] Newton CA Da Costa, Jean-Yves Béziau y Otávio AS Bueno. «Malinowski and Suszko on many-valued logics: On the reduction of many-valuedness to two-valuedness». En: *Modern Logic* 6.3 (1996), págs. 272-299 (ver p. 22).

[End01] H. Enderton. *A mathematical introduction to logic*. 2.ª ed. Accademic Press: Elsevier, 2001 (ver p. 74).

[FC03] V. L. Fernández y M. E. Coniglio. «Combining valuations with society semantics». En: *Journal of Applied Non-Classical Logics* 13.1 (2003), págs. 21-46 (ver p. 55).

[HL08] E. Hirsh y R. Lewin. «Algebraization of logics defined by literal-paraconsistent or literal-paracomplete matrices». En: *Mathematical Logic Quarterly* 54.2 (2008), págs. 153-166 (ver p. 92).

[KR96] H. J. Keisler y J Robbin. *Mathematical Logic and Computability*. McGrow-Hill, 1996 (ver p. 10).

[LM06] R. A. Lewin e I. Mikemberg. «Literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices». En: *Mathematical Logic Quarterly* 52.5 (2006), págs. 478-493. doi: `10.1002/malq.200510044` (ver pp. 2, 26, 57, 60).

[LM10] R. A. Lewin e I. Mikemberg. «First order theory for literal-paraconsistent and literal-paracomplete matrices». En: *Mathematical Logic Quarterly* 56.4 (2010), págs. 425-433. doi: `10.1002/malq.200810062` (ver p. 2).

[Mal93] G. Malinowski. *Many-Valued logics*. Oxford Logic Guides 25. Oxford: Clarendon Press, 1993 (ver p. 22).

[Mar05] J. Marcos. «On a problem of da Costa». En: *Essays on the Foundations of Mathematics and Logic. Polimetrica* (2005), págs. 53-69 (ver p. 48).

[Mar99] J. Marcos. «Possible-translations semantics for some weak classically-based paraconsistent logics». En: *Proceedings of CombLog*. Vol. 4. 1999, págs. 119-128 (ver pp. 30, 40, 48).

[SC95] A. M. Sette y W. Carnielli. «Maximal weakly-intuitionistic logics». En: *Studia Logica* 55.1 (1995), págs. 181-203 (ver p. 40).

[SW11] Y. Shramko y H. T. Wansing. *Truth and Falsehood: An Inquiry Into Generalized Logical Values*. Vol. 36. Trends in Logic. Springer, 2011.

[Set73] A. M. Sette. «On the propositional calculus P1». En: *Mathematica Japonicae* 18.13 (1973), págs. 173-180 (ver pp. 55, 57).

[Sus77] R. Suszko. «The Fregean Axiom and Polish mathematical logic in the 1920s». English. En: *Studia Logica* 36.4 (1977), págs. 377-380 (ver p. 20).

[Tsu98] M. Tsuji. «Many-valued logics and Suszko's thesis revisited». En: *Studia Logica* 60.2 (1998), págs. 299-309.

[WS08] H. Wansing e Y. Shramko. «Suszko's thesis, inferential many-valuedness, and the notion of a logical system». En: *Studia Logica* 88.3 (2008), págs. 405-429.

[Wój70] R. Wójcicki. «Some remarks on the consequence operation in sentential logics». eng. En: *Fundamenta Mathematicae* 68.3 (1970), págs. 269-279 (ver p. 22).

[Wój73] R. Wójcicki. «Matrix approach in methodology of sentential calculi». En: *Studia Logica* 32.1 (1973), págs. 7-37.

[ŁS58] J. Łoś y R. Suszko. «Remarks on sentential logics». En: *Indagationes Mathematicae* 20 (1958), págs. 177-183 (ver p. 5).